Umlauf

L 10; I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

1041) Lösung: 6 Punkte

Die Punkte M_2 und M_1 liegen auf der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$. Da $\triangle ABC$ gleichseitig ist, ist CM_1 Mittelsenkrechte von AB. Es seien D bzw. E die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit AC, ferner sei F der Fußpunkt des Lotes von M_2 auf M_1D. Dann sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die Dreiecke AM_1C, M_1FM_2 und M_2EC ähnlich, und es gilt wegen $\overline{AM_1} = \frac{1}{2}\overline{AC}$:

(4) $\overline{FM_1} = \frac{1}{2}\overline{M_1M_2}$. Nun ist

(5) $\overline{M_1M_2} = r_1 + r_2$, da k_1 und k_2 sich von außen berühren.

Nach dem Strahlensatz gilt

$r_1 : r_2 = \overline{M_1D} : \overline{M_2E} = \overline{CM_1} : \overline{CM_2}$.

Da M_2 auf CM_1 liegt, gilt

$\overline{CM_1} > \overline{CM_2}$ und mithin $r_1 > r_2$.

Daraus folgt

(6) $\overline{FM_1} = r_1 - r_2$.

Aus (4), (5), (6) folgt

$r_1 - r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$,

also $r_1 = 3r_2$ und damit

$r_1 : r_2 = 3 : 1$.

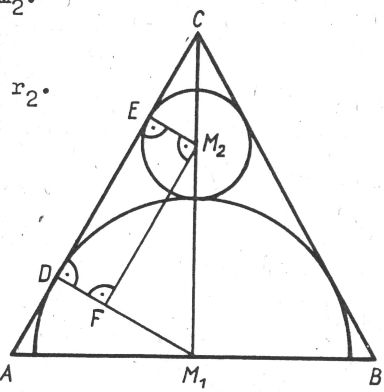

Abb. L 1041

(Der Beweis, daß F auf M_1D liegt, wird vom Schüler nicht verlangt.)

30 05 63-1(588)

L 10; I

1042) Lösung: 7 Punkte

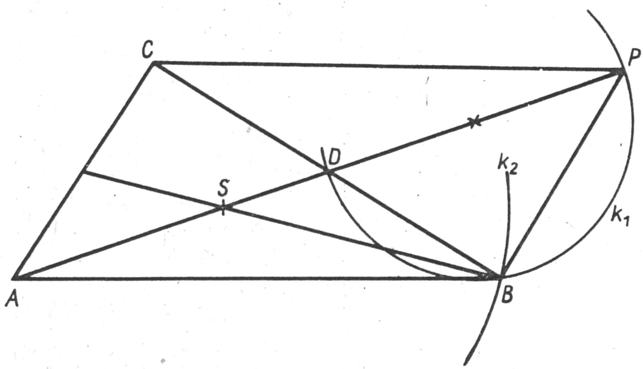

Abb. L 1042

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann gibt es genau einen Punkt P, für den ABPC ein Parallelogramm ist, und es werden AP und BC durch ihren Schnittpunkt D halbiert; ferner sind $\sphericalangle DBP$ und $\sphericalangle DCA$ rechte Winkel, also liegt nach der Umkehrung des Satzes des Thales B auf einem Halbkreis über DP. Ist weiter S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$, so gilt $\overline{AS} = \frac{2}{3} s_a$ und $\overline{BS} = \frac{2}{3} s_b$.

(II) Daher genügt ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert auf einer Geraden Punkte A, S, D, P in dieser Anordnung so, daß $\overline{AD} = \overline{DP} = s_a$ und $AS = \frac{2}{3} s_a$ gilt.

(2) Man schlägt einen Halbkreis k_1 über DP.

(3) Man schlägt den Kreis k_2 um S mit $\frac{2}{3} s_b$. Schneidet er k_1 in einem Punkt, so sei dieser B genannt.

(4) Man verlängert BD über D hinaus um seine eigene Länge bis C.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist AD Seitenhalbierende in $\triangle ABC$. Diese hat nach Konstruktion die Länge s_a. Wegen $\overline{AS} = \frac{2}{3} s_a$ ist S der Schwerpunkt von $\triangle ABC$, also enthält die Verlängerung von BS die Seitenhalbierende durch B. Wegen $\overline{BS} = \frac{2}{3} s_b$ hat sie die Länge s_b. Schließlich ist nach dem Satz des Thales $\overline{\sphericalangle PBD} = 90^\circ$ und wegen $\triangle ADC \cong \triangle PDB$ daher auch $\overline{\sphericalangle ACB} = 90^\circ$.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) ergeben bis auf Kongruenz eindeutig A, S, D, P, k_1, k_2. Dabei haben k_1, k_2 die Radien $r_1 = \frac{1}{2} s_a = 3$ cm,

$r_2 = \frac{2}{3} s_b = \frac{16}{3}$ cm und den Mittelpunktabstand

$d = \frac{1}{3} s + \frac{1}{2} s = 5$ cm.

Diese Längen erfüllen die Bedingung

$$r_2 - r_1 = \frac{7}{3}\text{ cm} < d < \frac{25}{3}\text{ cm} = r_2 + r_1.$$

Daher existiert genau ein Schnittpunkt B von k_1 mit k_2, und hiernach ist auch C durch (4) eindeutig bestimmt.

Somit existiert $\triangle ABC$ mit den geforderten Eigenschaften und ist durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

1043A) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

a)

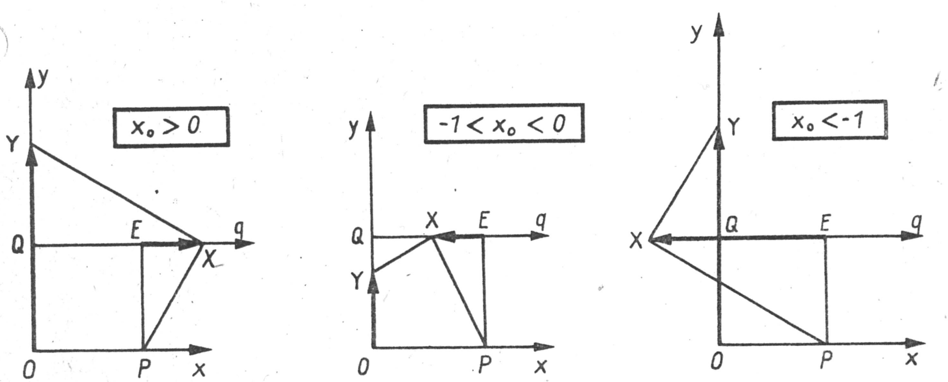

Abb. L 1043 A

Nach Konstruktion haben die gerichteten Strecken QE, EX die Längen 1 bzw. x_0; also hat die gerichtete Strecke QX die Länge $1 + x_0$. Für $x_0 \neq 0, -1$ zeigen wir, daß $\triangle$ EPX gleichsinnig ähnlich zu $\triangle$QXY ist. Ist nämlich $x_0 > 0$ oder $x_0 < -1$, so liegt E zwischen Q und X oder Q zwischen X und E, also in beiden Fällen Q zwischen O und Y; es gilt $\overline{\sphericalangle EPX} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle EXP} = \overline{\sphericalangle QXY}$; die Dreiecke stimmen also in den rechten Winkeln bei E bzw. Q und in den spitzen Winkeln bei P bzw. X überein; beim Umlauf von $\triangle$EPX und $\triangle$ QXY in der angegebenen Reihenfolge der Ecken werden die Strecken XE und QX in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf verschiedenen Seiten von q, woraus die gleichsinnige Ähnlichkeit folgt. Ist aber $-1 < x_0 < 0$, so liegt X zwischen Q und E und daher Y auf dem Strahl aus Q durch O; es gilt
$\overline{\sphericalangle EPX} = 90^\circ - \overline{\sphericalangle EXP} = 180^\circ - 90^\circ - \overline{\sphericalangle EXP} = \overline{\sphericalangle QXY}$;
die Dreiecke stimmen also wieder in den oben erwähnten Winkeln überein. Bei dem angegebenen Umlaufsinn werden XE und QX in gleicher Richtung durchlaufen, und die Dreiecke liegen auf derselben Seite von q.
Somit gilt, wenn $x_0 \neq 0, -1$ ist, für die Länge q_0 der gerichteten Strecke QY, die Proportion
$1 : x_0 = (1 + x_0) : q_0$, also ist

(1) $\quad q_0 = (x_0 + 1)x_0$.

Für $x_0 = 0$ oder $x_0 = -1$ gilt X = E oder X = Q und daher in beiden Fällen Y = Q, also $q_0 = 0$, d. h. ebenfalls (1).
Daher hat in jedem Falle Y die Ordinate
$1 + q_0 = x_0^2 + x_0 + 1$, w.z.b.w..

b) Angenommen, x_0 wäre eine reelle Nullstelle von f. Dann führte das mit dem entsprechenden Punkt X ausgeführte Verfahren auf Y = O, also $\overline{\sphericalangle PXO} = 90^\circ$. Daher läge nach der Umkehrung des Satzes von Thales X auf dem Kreis mit OP als Durchmesser. Das ist aber ein Widerspruch, da dieser Kreis keinen Punkt mit q gemeinsam hat.

1043B) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, (x,y) sei ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften. Dann gilt:

$$y^3 = (x+2)^4 - x^4 = ((x+2)^2 + x^2)((x+2)^2 - x^2)$$

$$= (2x^2 + 4x + 4)(4x + 4)$$

$$= 8(x+1)((x+1)^2 + 1).$$

Daher ist y gerade, also $y = 2v$ mit ganzzahligem v. Hierfür und für die ganze Zahl $u = x + 1$ gilt somit

$$8v^3 = 8u(u^2 + 1), \text{ also } v^3 = u^3 + u. \qquad (1)$$

Wäre $u > 0$, so folgte aus (1) zunächst $v^3 > u^3$, also $v > u$, wegen der Ganzzahligkeit von u und v mithin $v \geqq u + 1$ und damit

$v^3 \geqq u^3 + 3u^2 + 3u + 1 > u^3 + u$ im Widerspruch zu (1).

Wäre $u < 0$, so folgte $v^3 < u^3$, also $v < u$, wegen der Ganzzahligkeit von u und v mithin $v \leqq u - 1$ und damit

$v^3 \leqq u^3 - 3u^2 + 3u - 1 < u^3 + u$ im Widerspruch zu (1).

Daher kann nur für $u = 0$, d. h. $x = -1$, ein Zahlenpaar mit den verlangten Eigenschaften existieren. Aus (1) folgt hierfür $v = 0$, also $y = 0$.
Da umgekehrt $(-1, 0)$ die Gleichung $(x+2)^4 - x^4 = y^3$ erfüllt, hat genau dieses Zahlenpaar die verlangten Eigenschaften.

kenlauft

L 10; II XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

1044) Lösung: 6 Punkte

Für die gesuchte Zahl x gilt

$(x + \sqrt{2})^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} - 2\sqrt{16 - 7} = 2$, also

(1) $x(x + 2\sqrt{2}) = 0$.

Wegen $\sqrt{4 + \sqrt{7}} > \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, also

$x + 2\sqrt{2} = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{2} > \sqrt{2} > 0$,

folgt aus (1), daß $x = 0$ gilt.

1045) Lösung: 7 Punkte

Wegen $|x| = |-x|$ und $|y| = |-y|$ ist die zur Veranschaulichung gesuchte Punktmenge zu beiden Koordinatenachsen achsensymmetrisch. Wir ermitteln zunächst diejenigen unter den gesuchten Punkten, für die $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ gilt. Für diese Punkte ist die verlangte Gleichung äquivalent mit $\left|x + |y - 3| - 3\right| = 1$. Dies gilt genau dann, wenn (1) $x + |y-3| - 3 = 1$ oder (2) $-(x + |y-3| - 3) = 1$ gilt. Gleichung (1) ist äquivalent mit $|y-3| = 4 - x$. Dies gilt genau dann, wenn (1.1) $y-3 = 4-x \geqq 0$ oder (1.2) $-(y-3) = 4-x \geqq 0$ gilt. Gleichung (2) ist äquivalent mit $|y-3| = 2-x$. Dies gilt genau dann, wenn (2.1) $y-3 = 2-x \geqq 0$ oder (2.2.) $-(y-3) = 2-x \geqq 0$ gilt.

Unter den Punkten mit $x,y \geqq 0$ erfüllen genau diejenigen die Bedingung (1.1), für die

(A) $0 \leqq x \leqq 4$, $y = 7 - x$ gilt; genau diejenigen die Bedingung (1.2), für die $0 \leqq y \leqq 3$, $x = y + 1$, oder, gleichbedeutend hiermit,

(B) $1 \leqq x \leqq 4$, $y = x-1$ gilt; genau diejenigen die Bedingung (2.1), für die

(C) $0 \leqq x \leqq 2$, $y = 5-x$ gilt; genau diejenigen die Bedingung (2.2), für die

(D) $0 \leqq x \leqq 2$, $y = x+1$ gilt.

Die Abb. L 1045 stellt für jede der bei (A) bis (D) in den angegebenen Intervallen definierten Funktionen den Graph dar sowie die aus der Vereinigungsmenge M der Graphen durch Spiegelung an der x-Achse entstehende Menge M' sowie die aus $M \cup M'$ durch Spiegelung an der y-Achse entstehende Menge M". Mit der Menge $M \cup M' \cup M''$ ist die gesuchte Veranschaulichung gefunden.

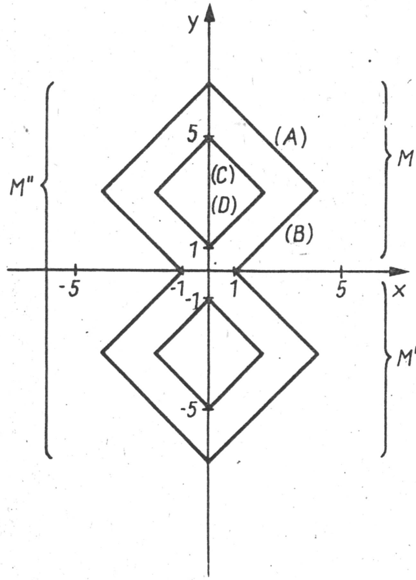

Abb. L 1045

1046) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Wegen $\overline{AC} = \overline{AD}$ liegt A auf der mittelsenkrechten Ebene ε von CD. Ebenso liegt B auf ε. Daher ist ε diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.
Als regelmäßiges Tetraeder hat ABCD einen Umkugelmittelpunkt S mit $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$; dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d. h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit Verbindungsebenen von je einer Tetraederkante und S überein.
Jede der an S angrenzenden Seitenflächen des Tetraeders ABCS liegt somit in einer der Schnittebenen; Entsprechendes gilt für die Tetraeder ABDS, ACDS, BCDS. Die gesuchte Zerlegung von ABCD kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Tetraeder ABCS, ABDS, ACDS, BCDS (in die man ABCD zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

Zum weiteren Zerlegen von ABCS geben genau diejenigen Schnittkanten Anlaß, die (außer durch S) durch innere Punkte von ABCS gehen. Das sind genau diejenigen, die durch innere Punkte des Dreiecks ABC gehen, also diejenigen, die durch D, eine der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen. Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in 6 flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen. Demnach wird das Tetraeder ABCS in genau 6 volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu ABCS kongruenten Tetraeder ABDS, ACDS, BCDS. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Teilkörper. Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_K - \frac{1}{24} V_T$, wobei V_T das Volumen des Tetraeders ABCD ist. Wegen $V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ gilt also

$$V_K = \frac{a^3}{288}\sqrt{2} .$$