A 10;I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1031) Man beweise, daß für alle konvexen Vierecke ABCD $\frac{1}{2}u < e + f < u$ gilt. Dabei seien u der Umfang des Vierecks und e bzw. f die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

1032) Man ermittle alle Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x,y, die die Gleichung $2x^3 + xy - 7 = 0$ erfüllen.

1033) Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die gleiche Länge a. E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Errechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

30 05 62-1 (52) 1.65 - 1173

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

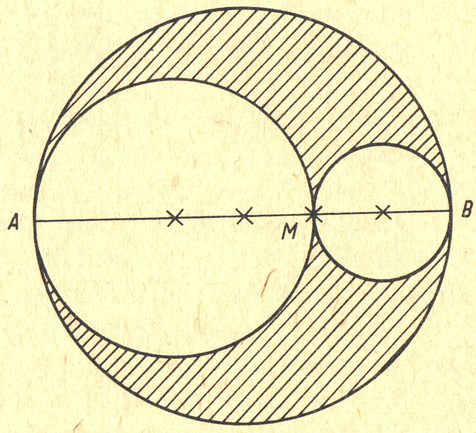
1034) Man beweise:
Wenn die Summe dreier Kubikzahlen durch 7 teilbar ist, dann ist wenigstens eine von ihnen durch 7 teilbar.

1035) Gegeben sei ein Kreis k mit einem Durchmesser AB der Länge d. In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, daß sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so daß also $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$ gilt. Dabei sei $\overline{AM} \geq \overline{MB}$.
Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche (Abb. A 1035) ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.
Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser schraffierten Fläche am größten ist.

1036) Man beweise, daß die Ungleichung

$$|\log_a b| + |\log_b a| \geqq 2$$ für alle Paare positiver reeller Zahlen (a,b) mit $a \neq 1$, $b \neq 1$ gilt.

Abb. A 1035



L 10;I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1031) <u>Lösung:</u> <u>5 Punkte</u>

Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS:

$$\begin{aligned}
\overline{AS} + \overline{BS} &> \overline{AB}, \\
\overline{BS} + \overline{CS} &> \overline{BC}, \\
\overline{CS} + \overline{DS} &> \overline{CD}, \\
\overline{AS} + \overline{DS} &> \overline{DA},
\end{aligned}$$

also $2(\overline{AS}+\overline{BS}+\overline{CS}+\overline{DS}) > \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = u$. Da wegen der Konvexität von ABCD der Punkt S sowohl auf AC als auch auf BD liegt, gilt

$\overline{AS} + \overline{CS} = e$ und $\overline{BS} + \overline{DS} = f$, so daß man $e + f > \frac{1}{2}u$ erhält.

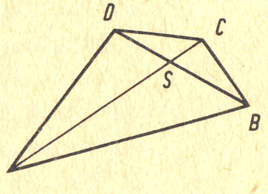
Analog erhält man für die Dreiecke ABC, DAC, ABD, BCD:

$$\begin{aligned}
\overline{AB} + \overline{BC} &> \overline{AC}, \\
\overline{CD} + \overline{DA} &> \overline{AC}, \\
\overline{AB} + \overline{DA} &> \overline{BD}, \\
\overline{BC} + \overline{CD} &> \overline{BD}
\end{aligned}$$

also $2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}) > 2(\overline{AC}+\overline{BD})$ bzw.

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} > \overline{AC}+\overline{BD}$ bzw.

$u > e + f$.



Aus beiden folgt die Behauptung.

Abb. L. 1031

30 05 62-1 (52) 0.65 - 1173

1032) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Angenommen, $(x;y)$ sei eine Lösung der gegebenen Gleichung mit ganzen Zahlen x,y, dann gilt:

$x(2x^2 + y) = 7.$

Da 7 Primzahl ist, folgt, daß nur einer der Fälle

$x = 1, \quad 2x^2 + y = 7$ und damit $y = 5;$

$x = 7, \quad 2x^2 + y = 1$ und damit $y = -97;$

$x = -1, \quad 2x^2 + y = -7$ und damit $y = -9;$

$x = -7, \quad 2x^2 + y = -1$ und damit $y = -99$ vorliegen kann.

Also können höchstens die Zahlenpaare $(1;5)$, $(7;-97)$, $(-1;-9)$, $(-7;-99)$ Lösungen sein.

Tatsächlich gilt $2 + 5 - 7 = 0, \quad 686 - 679 - 7 = 0,$

$-2 + 9 - 7 = 0, \quad -686 + 693 - 7 = 0;$

jedes der genannten Zahlenpaare ist also Lösung.

1033) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Die Höhenlänge h der Pyramide läßt sich aus dem Dreieck ACS errechnen.

Wegen $\overline{AC} = a\sqrt{2}$ gilt $h = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Jeder der Punkte E und F hat dann nach dem Strahlensatz von der Ebene durch A, B, C, D den Abstand $h_1 = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Der Teilkörper T_1 habe die Punkte A, B, C, D, E, F als Eckpunkte. Zwei ebene, senkrecht auf der Grundfläche stehende Schnitte, die durch E und F gehen und parallel zu CD bzw. AB verlaufen, zerlegen T_1 in ein Prisma $KLMNFE$ (Abb. L 1033) mit dem Volumen P_1 und zwei volumengleiche

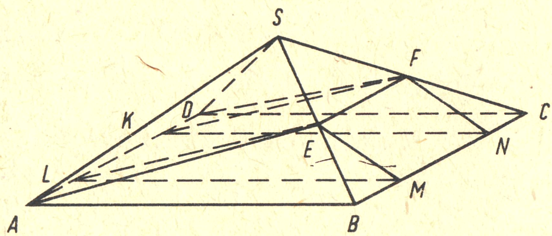


Abb. L 1033

vierseitige Pyramiden ABMLE und KNCDF.
Ihre Volumina seien P_2 und P_3.

Wegen $\overline{LM} = a$, $h_1 = \frac{1}{4} a\sqrt{2}$ und $\overline{EF} = \overline{MN} = \frac{a}{2}$ gilt

$P_1 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{4} a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{16} a^3 \cdot \sqrt{2}$, und aus $\overline{CN} = \frac{1}{4} a$ folgt

$P_2 = P_3 = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{4} a \cdot \frac{1}{4} a\sqrt{2} = \frac{1}{48} a^3 \cdot \sqrt{2}$.

Das Volumen V_1 von T_1 ergibt sich aus

$$V_1 = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{16} a^3 \sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{48} a^3 \sqrt{2} = \frac{5}{48} a^3 \sqrt{2}.$$

Das Gesamtvolumen V der gegebenen Pyramide erhält man aus
$V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$.

Für den Teilkörper T_2 mit dem Volumen V_2 gilt
$V_2 = V - V_1 = \frac{3}{48} a^3 \sqrt{2}$.

Damit ergibt sich $V_1 : V_2 = 5 : 3$.

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1034) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es sei	dann ist
$a \equiv 0 \pmod 7$	$a^3 \equiv 0 \pmod 7$
$a \equiv 1 \pmod 7$	$a^3 \equiv 1 \pmod 7$
$a \equiv 2 \pmod 7$	$a^3 \equiv 1 \pmod 7$
$a \equiv 3 \pmod 7$	$a^3 \equiv -1 \pmod 7$
$a \equiv 4 \pmod 7$	$a^3 \equiv 1 \pmod 7$
$a \equiv 5 \pmod 7$	$a^3 \equiv -1 \pmod 7$
$a \equiv 6 \pmod 7$	$a^3 \equiv -1 \pmod 7$

Eine Kubikzahl a^3 kann bei Division durch 7 also nur einen der Reste 0, 1, -1 haben.
(Anmerkung: Von Schülern, die das Rechnen mit Restklassen nicht beherrschen, läßt sich dieser Satz wie folgt beweisen:
Es sei $a = 7g + 1$ (g nat. Zahl).
Dann ist $a^3 = 7^3g^3 + 3\cdot7^2g^2 + 3\cdot7g + 1$
$= 7(7^2g^3 + 3\cdot7\,g^2 + 3g) + 1$, d. h. a^3 läßt bei Division durch 7 den Rest 1. Entsprechend kann der Nachweis für alle anderen Fälle geführt werden.)
Angenommen keine der drei Kubikzahlen wäre durch 7 teilbar. Dann könnte die Summe der drei Kubikzahlen nur einen der folgenden Reste bei Division durch 7 haben und keinen anderen:

$1 + 1 + 1 = 3$
$1 + 1 - 1 = 1$
$1 - 1 - 1 = -1$
$-1 - 1 - 1 = -3$

30 05 62-1(52) 0.65 - 1173

In keinem dieser Fälle wäre aber die Summe der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß wenigstens eine der drei Kubikzahlen durch 7 teilbar sein, w.z.b.w..

1035) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Offensichtlich ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche genau dann am größten, wenn die Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2 am kleinsten ist. Bezeichnet x den Abstand zwischen M und dem Mittelpunkt von k, so gilt, da dieser Mittelpunkt auf AM liegt,

$\overline{AM} = \frac{d}{2} + x$ und $\overline{MB} = \frac{d}{2} - x$ sowie $0 \leqq x < \frac{d}{2}$.

Für die Summe F_S der Flächeninhalte der Kreise k_1 und k_2 gilt nun

$$F_S = \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{d}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 \right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d^2}{2} + 2x^2\right).$$

F_S wird also genau dann am kleinsten, wenn $2x^2 = 0$, also $x = 0$ gilt, d. h. genau für $\overline{AM} = \frac{d}{2}$.

1036) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Es gilt $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ und folglich auch

$$|\log_a b| = \frac{1}{|\log_b a|} \qquad (1)$$

Weiter gilt $(x - 1)^2 \geqq 0$, für jedes reelle x,

also $x^2 - 2x + 1 \geqq 0$, woraus man für $x \neq 0$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geqq 0 \text{ und weiter}$$

$$x + \frac{1}{x} \geqq 2 \quad (2) \text{ erhält.}$$

Ferner gilt für $x = |\log_a b|$ wegen (1)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{|\log_a b|} = |\log_b a|.$$

Daraus und aus (2) folgt $|\log_a b| + |\log_b a| \geqq 2$, w.z.b.w..