A 10 XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 10

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1021) Ermitteln Sie alle (im dekadischen Zahlensystem) dreistelligen Primzahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Schreibt man jede Ziffer der dreistelligen Primzahl einzeln, so bezeichnet jede eine Primzahl.

(2) Die ersten beiden und die letzten beiden Ziffern der dreistelligen Primzahl bezeichnen (in dieser Reihenfolge) je eine zweistellige Primzahl.

1022) Bei den XX. Olympischen Sommerspielen schnitten die Sportler unserer Republik hervorragend ab. In der inoffiziellen Länderwertung, bei der für den 1. bis 6. Platz 7, 5, 4, 3, 2 bzw. 1 Punkte vergeben wurden, belegten sie mit 480 Punkten hinter der UdSSR und den USA den dritten Platz. Dabei errangen sie 22 vierte, 22 fünfte und 23 sechste Plätze. Für den 1., den 2. und den 3. Platz wurden wie üblich Gold-, Silber-, bzw. Bronzemedaillen vergeben. Die größte Differenz der Anzahlen der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- bzw. Bronzemedaillen betrug dabei 3.

Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, die genaue Anzahl der von den DDR-Sportlern errungenen Gold-, Silber- und Bronzemedaillen zu ermitteln!

1023) Ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ϱ. Man berechne diesen Inkreisradius ϱ.

1024) Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck ABCD aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70^\circ$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und α die Größe des Winkels BAD.

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1021) Lösung: 8 Punkte

Wegen (1) können nur drei der Ziffern 2, 3, 5, 7 vorkommen. Aus diesen vier Ziffern kann man genau die zweistelligen Primzahlen 23, 37, 53, 73 bilden.
Aus ihnen lassen sich in der in der Aufgabe angegebenen Weise (2) genau folgende dreistellige Zahlen bilden: 237, 373, 537, 737.
Nun sind 237 und 537 durch 3 teilbar und 737 ist durch 11 teilbar. Die Zahl 373 dagegen ist weder durch 2 noch durch 3, 5, 7, 11, 13, 17 oder 19 teilbar. Wegen $373 < 20^2$ ist sie (dann auch durch keine größere Primzahl teilbar und) somit selbst Primzahl.
Folglich ist 373 die einzige dreistellige Primzahl, die (1) und (2) erfüllt.

1022) Lösung: 9 Punkte

Für die 22 vierten, die 22 fünften und die 23 sechsten Plätze erhielt die DDR-Mannschaft laut Aufgabe $22 \cdot 3 + 22 \cdot 2 + 23 = 133$ Punkte. Da sie insgesamt 480 Punkte erzielte, bekam sie wegen $480 - 133 = 347$ für die ersten, zweiten und dritten Plätze zusammen genau 347 Punkte.
Es sei nun g die Anzahl der errungengn Gold-, s die der Silber- und b die der Bronzemedaillen. Dann gilt (1) $7g + 5s + 4b = 347$. Ist k die kleinste der Zahlen g, s, b, so ist mit ganzzahligen x, y, z (2) $g = k + x$, $s = k + y$, $b = k + z$, wobei (3) mindestens eine der Zahlen x, y, z gleich 0 und (4) mindestens eine der Zahlen x, y, z gleich 3 ist und (5) $0 \leq x, y, z \leq 3$ gilt.

Aus (1), (2) folgt (6) $16\,k + 7x + 5y + 4\,z = 347$.
Wegen (3), (4), (5) gilt $7 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \geqq 7\,x + 5\,y + 4\,z \geqq 4 \cdot 3$, hieraus und aus (6) folgt (7) $16\,k + 36 \geqq 347 \geqq 16\,k + 12$. Aus der linken Ungleichung in (7) folgt $16\,k \geqq 311 > 304$, also (8) $k > 19$. Aus der rechten Ungleichung in (7) folgt $16\,k \leqq 335 < 336$, also (9) $k < 21$. Wegen (8), (9) gilt (10) $k = 20$. Hieraus und aus (6) folgt $7\,x + 5\,y + 4\,z = 27$.

Wäre $z = 0$, so müßte $7x = 27 - 5y$ durch 7 teilbar sein, was für alle $y = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Wäre $y = 0$, so müßte $7\,x = 27 - 4\,z$ durch 7 teilbar sein, was für alle $z = 0, 1, 2, 3$ nicht zutrifft. Also ist (11) $x = 0$, und $5\,y = 27 - 4z$ muß durch 5 teilbar sein, was unter den Möglichkeiten $z = 0, 1, 2, 3$ nur für (12) $z = 3$ zutrifft und auf (13) $y = 3$ führt.
Aus (2), (10), (11), (12), (13) folgt die zu beweisende Behauptung, daß g, s, b durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt sind (nämlich als $g = 20$, $s = b = 23$).

<u>Hinweis</u>: Eine "Probe", d. h. der Nachweis, daß diese Zahlen alle angegebenen Bedingungen erfüllen, ist zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da in der Aufgabenstellung nur der Nachweis der Einzigkeit der Lösung verlangt wird.

1023) <u>Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

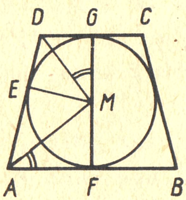

Abb. L 1023

Da das Trapez gleichschenklig ist, liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmetrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB und CD (Abb. L 1023).
Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel GDE und EAF. Wegen $\overline{\sphericalangle GDE} + \overline{\sphericalangle EAF} = 180^\circ$ gilt daher
(1) $\overline{\sphericalangle MDG} + \overline{\sphericalangle MAF} = 90^\circ$.

Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklig sind, gilt
(2) $\overline{\sphericalangle MDG} + \overline{\sphericalangle DMG} = 90^\circ$.

Aus (1) und (2) folgt $\overline{\sphericalangle MAF} = \overline{\sphericalangle DMG}$.
Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich.
Wegen $\overline{DG} = 1$ cm, $\overline{AF} = 4$ cm und $\overline{MG} = \overline{MF} = \varrho$ folgt daraus

$\overline{DG} : \overline{MG} = \overline{MF} : \overline{AF}$ bzw.

1 cm : $\varrho = \varrho$: 4 cm, woraus man

$\varrho^2 = 4\ \text{cm}^2$ und wegen $\varrho > 0$ schließlich

$\varrho = 2$ cm erhält.

Der Inkreisradius ϱ hat die Länge 2 cm.

1024) <u>Lösung</u>: <u>12 Punkte</u>

(I) Angenommen, ABCD sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Nach dem Satz über die Summe der Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt:

$\overline{\sphericalangle DCB} = 180^\circ - \alpha$.

Das Dreieck BCD läßt sich damit aus b, c und einem Winkel von $180^\circ - \alpha$ konstruieren.
Der Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvierecks liegt auf den Mittelsenkrechten der Seiten BC und CD.
Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit dem Radius $\overline{MB}$ und zweitens auf dem Kreis um B mit dem Radius a.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Viereck ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.

(1) Wir zeichnen eine Strecke BC der Länge b.
(2) Wir tragen in C an BC einen Winkel von $180^\circ - \alpha = 110^\circ$ an.
(3) Wir schlagen um C einen Kreis mit dem Radius c. Schneidet dieser Kreis den freien Schenkel des angetragenen Winkels in einem Punkt, so sei dieser D genannt.
(4) Auf BC und CD errichten wir die Mittelsenkrechten; schneiden sie sich, so sei ihr Schnittpunkt M genannt.
(5) Wir schlagen den Kreis um M mit dem Radius $\overline{MB}$.

(6) Wir schlagen den Kreis um B mit dem Radius a. Schneiden sich die beiden Kreise auf derjenigen Seite von BD, auf der C nicht liegt, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Viereck ABCD den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion (4), (5), (6) geht der in (5) konstruierte Kreis durch A, B, C, D, also ist ABCD ein Sehnenviereck. Ferner folgt aus der in (6) getroffenen Auswahl von A, daß ABCD konvex ist. Nach den Konstruktionsschritten (1), (3), (6) gilt $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CD} = c$. Weiterhin gilt nach Konstruktion $\overline{\sphericalangle DCB} = 110^\circ = 180^\circ - \alpha$; damit ist nach dem Satz über das Sehnenviereck

$\overline{\sphericalangle BAD} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle DCB} = \alpha$.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar; hierauf ist (3) dann eindeutig ausführbar. Auch Konstruktionsschritt (4) ist eindeutig ausführbar, da BC und CD nicht parallel zueinander sind. Damit ist auch (5) eindeutig ausführbar. Da mit den gegebenen Größen, wie man der Abb. L. 1024 entnehmen kann, $\overline{BD} > a$ ausfällt, ist auch (6) eindeutig ausführbar.

Das konvexe Sehnenviereck ABCD ist also bis auf Kongruenz durch die gegebenen Größen eindeutig bestimmt.

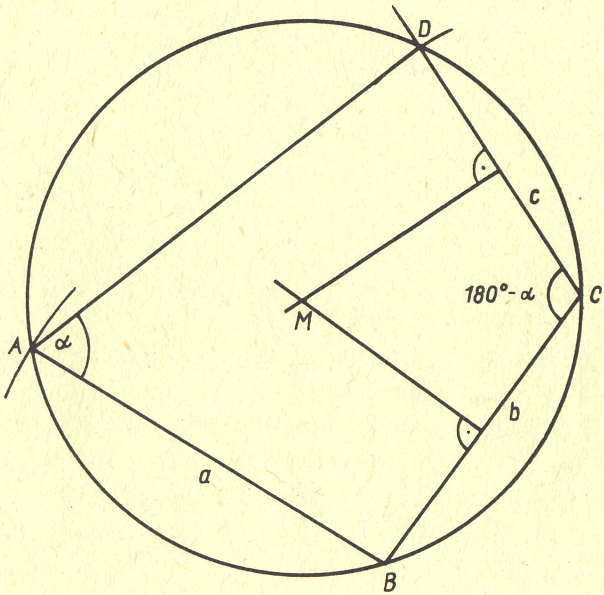

Abb. L 1024