A 9;I

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

931) Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x;y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind: Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z. B. (25;61); denn es gilt 52 + 9 = 61 und 16 + 9 = 25.

<u>Hinweis</u>: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist stattdessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares (x;y) einander zugeordnet

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!
b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

932) Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

933) Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge 6 Punkte A,B C,D,E,F gelegen. Ein Punkt P außerhalb g sei so gelegen, daß PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte
$\overline{PC} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$.
Man beweise, daß dann $\sphericalangle\ \cancel{ABF}$ APF $= 135^\circ$ gilt.
(<u>Hinweis</u>: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.)

30 05 62-1(52) 1.65 - 1173

A 9;II XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

934) In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, daß die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360^0 beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

935) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit $abc \neq 0$ und $a+b+c \neq 0$ die Gleichung
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.
(Rationale Zahlen x,y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

936) Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,

(2) $\overline{BD'} = \overline{CD'} = a$,

(3) $\overline{AD'} \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

30 05 62-1(52) 1.65 - 1173

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

931) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

a) Sind a, b die Ziffern einer der gesuchten Zahlen, die also $10a + b$ lautet, so entsteht aus ihr durch die genannten Operationen die Zahl $10b + a + 9$. Da auch diese zweistellig ist und da $a \geqq 1$ gilt, folgt

$100 > 10b + a + 9 \geqq 10b + 10$, also $b < 9$. Daher können nur zweistellige Zahlen, die nicht auf 9 enden, die verlangte Eigenschaft haben.
In der Tat hat jede nicht auf 9 endende zweistellige Zahl diese Eigenschaft; denn sind a und b ihre Ziffern, so hat die aus ihr entstehende Zahl $10b + a + 9$ wegen $a \geqq 1$ und $b < 9$ die Ziffern $b+1$ und $a-1$, und aus dieser Zahl entsteht, da für sie auch $b+1 \geqq 1$ und $a-1 < 9$ gilt, ebenso die Zahl mit den Ziffern $(a-1)+1$ und $(b+1)-1$, d. h. die Ausgangszahl, wie es gefordert war.

b) Genau dann ist eine der in a) ermittelten Zahlen sich selbst zugeordnet, wenn $b+1 = a$ gilt. Diese Bedingung wird genau von den Zahlen 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98 erfüllt.

932) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Genau dann ist $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$ durch 10 teilbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $10 \mid n$

(2) $10 \mid (n^2 + 2)$

(3) $5 \mid n$ und $2 \mid (n^2 + 2)$

(4) $2 \mid n$ und $5 \mid (n^2 + 2)$.

Die Bedingung (1) wird von allen durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n erfüllt. Die Bedingung (2) könnte nur von solchen natürlichen Zahlen n erfüllt werden, deren Quadrat auf 8 endet. Derartige Zahlen gibt es nicht.
Angenommen, es gäbe natürliche Zahlen n, die (3) oder (4), aber nicht (1) erfüllen. Eine solche Zahl müßte entweder wegen (3) auf 5 enden oder ihr Quadrat müßte wegen (4) auf 3 oder 8 enden. Natürliche Zahlen, deren Quadrat auf 3 oder 8 endet, gibt es nicht. Endet n auf 5, so ist n^2 und damit auch $n^2 + 2$ ungerade, also nicht durch 2 teilbar. Folglich erfüllen genau alle durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

Anderer Lösungsweg: Die Endziffern der Kuben aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen wiederholen sich periodisch und lauten der Reihe nach: 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, 0, 1, 8, ...
Von den Summen dreier aufeinanderfolgender Endziffern ist hier nur die Summe der aufeinanderfolgenden Zahlen 9, 0, 1 durch 10 teilbar; außerdem gilt $(-1)^3 + 0^3 + 1^3 = 0$. Daher haben genau die durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen die verlangte Eigenschaft.

933) Lösung: 7 Punkte

Die in P auf der Geraden durch A und P errichtete Senkrechte schneide g in M; die in F auf g errichtete Senkrechte schneide die Gerade durch A und P in Q. Nach dem Höhensatz für das bei P rechtwinklige Dreieck AMP ist:

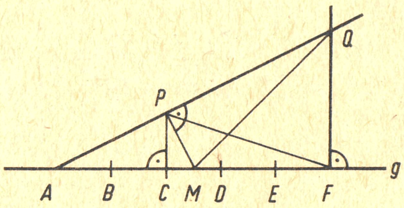

Abb. L 933

$$\overline{CM} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}\,\overline{CP}, \text{ also}$$

$$\overline{MF} = \frac{5}{2}\,\overline{CP}.$$

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\overline{FQ} = \frac{\overline{CP} \cdot \overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{5}{2}\,\overline{CP}.$$

Daher ist das bei F rechtwinklige Dreieck MQF gleichschenklig mit $\sphericalangle FMQ = 45^\circ$. Das Viereck FMPQ hat bei F und P rechte Winkel, ist also ein Sehnenviereck; folglich gilt (Peripheriewinkelsatz)

$$\sphericalangle FPQ = \sphericalangle FMQ = 45^\circ.$$

Daraus folgt die Behauptung.

<u>Anderer Lösungsweg:</u>

Die Senkrechte auf g in E schneide die Gerade durch A und P in R. Ferner sei Q der Fußpunkt des von P auf RE gefällten Lotes.

Dann ist PCEQ ein Rechteck. Bezeichnet man die Länge der Strecke AB mit a, so gilt mithin $\overline{PQ} = \overline{CE} = 2a$; $\overline{PC} = \overline{QE} = a$. Die Dreiecke ACP und PQR stimmen in den Winkelgrößen und in der Länge einer Seite überein. Sie sind daher kongruent, und es gilt $\overline{PC} = \overline{RQ} = a$. Folglich sind nach (sws) auch die Dreiecke PQR und REF kongruent, und es gilt $\overline{PR} = \overline{RF}$, sowie $\sphericalangle ERF = \sphericalangle QPR$.

Da der Winkel ERF Komplementwinkel zum Winkel EFR ist, ist er es auch zum Winkel QRP, also ist $\triangle PRF$ rechtwinklig-gleichschenklig. Der Winkel FPR hat als Basiswinkel somit eine Größe von 45° und sein Supplementwinkel APF mithin einen von 135°, w.z.b.w..

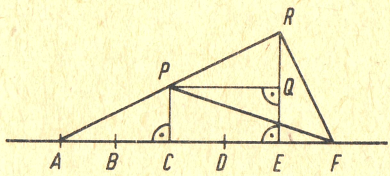

Abb. L 933a

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

934) Lösung: 6 Punkte

Jedes regelmäßige n-Eck ($n \geqq 3$) läßt sich in n gleichschenklige Dreiecke zerlegen, indem man seinen Mittelpunkt mit den Eckpunkten verbindet. Die Summe der Winkelgrößen dieser n Dreiecke beträgt $n \cdot 180^\circ$. Die Summe der Größen aller Basiswinkel und damit die Summe der Größen der Innenwinkel des n-Ecks beträgt folglich $(n-2)\cdot 180^\circ$. Daher hat jeder Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck eine Größe von $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$. Also hat n genau dann die verlangte Eigenschaft, wenn eine natürliche Zahl m mit

$\frac{n-2}{n}\,180^\circ \cdot m = 360^\circ$, d. h. mit (1) $m = \frac{2n}{n-2}$ existiert.

Ist dies der Fall, so ist $n-2$ ($\geqq 1$) Teiler von $2n = 2(n-2) + 4$, also auch von 4, also eine der Zahlen 1, 2, 4; somit ist dann n eine der Zahlen 3, 4, 6. Umgekehrt existiert zu diesen Zahlen n je genau ein m mit (1), nämlich der Reihe nach 6, 4, 3. Daher sind diese n und die zugehörigen m alle gesuchten Angaben, d. h., es lassen sich genau 6 regelmäßige Dreiecke bzw. genau 4 regelmäßige Vierecke bzw. genau 3 regelmäßige Sechsecke in der beschriebenen Weise aneinanderlegen. Bei allen anderen regelmäßigen Vielecken ist das Entsprechende nicht möglich.

935) Lösung: 7 Punkte

Aus der Voraussetzung folgt durch Multiplikation mit $abc(a + b + c)$:

$$(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc, \text{ also}$$
$$(a+b)(bc+ac+ab) + bc^2 + ac^2 + abc = abc$$
$$(a+b)(bc+ac+ab) + (a+b)c^2 = 0$$

L 9;II

$$(a+b)(bc+ac+ab+c^2) = 0$$
$$(a+b)\left[b(c+a)+c(c+a)\right] = 0$$
$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0.$$

Hieraus folgt, daß mindestens eine der Gleichungen $a = -b$, $a = -c$, $b = -c$ gilt, w.z.b.w..

936) Lösung: 7 Punkte

Wenn ein Punkt D' die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, so liegt er nach (2) in der zu BC mittelsenkrechten Ebene η. Diese geht durch A, D und den Mittelpunkt F von BC. In η liegen auch die Lote DE, D'E' von D, D' auf die Ebene durch A, B, C. Ihre Fußpunkte E, E' liegen also auf der Geraden durch A und F; nach (1) gilt außerdem

(4) $\overline{DE} = \overline{D'E'}$.

Nach (2) ist ferner $\triangle BCD' \cong \triangle BCD$, also

(5) $\overline{DF} = \overline{D'F}$.

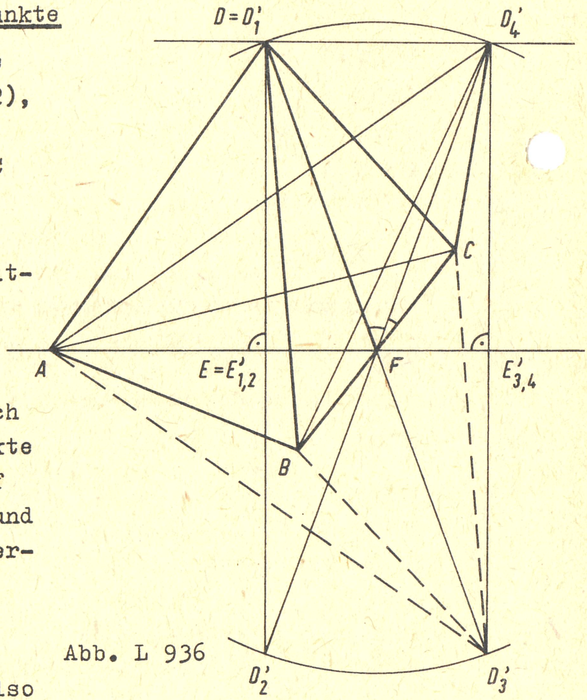

Abb. L 936

Wegen (4), (5) sind die rechtwinkligen Dreiecke DEF und D'E'F kongruent, was in η für genau vier Lagemöglichkeiten von D' gilt, nämlich erstens für $D'_1 = D$, zweitens für das Spiegelbild D'_2 von D'_1 bei Spiegelung an der Geraden durch A und F, drittens für das Spiegelbild D'_3 von D'_1 bei Spiegelung an F, viertens für das Spiegelbild D'_4 von D'_2 bei Spiegelung an F.

Von diesen Punkten erfüllen genau D'_3 und D'_4 die Bedingung (3). Da sie auch (2) und wegen (4) auch (1) erfüllen, sind sie alle Punkte der gesuchten Art

L 9;II

Nun gilt $\overline{AF} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; ferner liegt E ebenso wie auc AF auch auf den anderen Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC, also ist $\overline{AE} = \frac{2}{3}\,\overline{AF} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, $\overline{EF} = \overline{E'F} = \frac{1}{3}\,\overline{AF}$, $\overline{AE'}_{3,4} = \frac{4}{3}\,\overline{AF} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Somit ergibt sich $\overline{DE} = \overline{D'_{3,4}\ E'_{3,4}} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}\,a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$,

$\overline{AD'}_{3,4} = \sqrt{\frac{4}{3}\,a^2 + \frac{2}{3}\,a^2} = a\sqrt{2}$.