A 9 XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse ~~8~~ 9

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

921) Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der ~~Sekunden~~ Stunden-zeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

922) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkte D. Beweisen Sie, daß D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

923) Ein konvexes gleichschenkliges Trapez ABCD ($AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} > \overline{CD}$) soll folgende Eigenschaften haben:
Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.
Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt, und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

924) Man denke sich eine Kreislinie in 1000 gleichlange Teilbögen zerlegt und jeden der Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 bezeichnet.

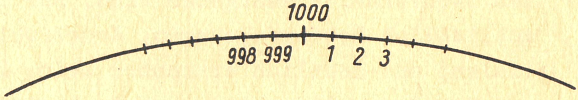

Abb. A 924

Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchstrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist solange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchstrichen werden müßten, die bereits gestrichen sind.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

921) Lösung: 7 Punkte

In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 Umdrehungen, der Stundenzeiger genau eine Umdrehung. Der Stundenzeiger wird während dieser einen Umdrehung vom Minutenzeiger genau 11 mal überrundet. Zwischen je zwei Überrundungen bilden die Zeiger genau zweimal einen rechten Winkel. In 12 aufeinanderfolgenden Stunden bilden daher die Zeiger 22 mal einen rechten Winkel miteinander.

922) Lösung: 9 Punkte

Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck AA'C. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'. Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite A'C', dann ist AS Seitenhalbierende von A'C', da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt. Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2 schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

Oder:

Spiegelt man D an AB und wird der Bildpunkt D' genannt, so ist das Dreieck D'AD gleichseitig. Sei nun BD = x, so gilt $\overline{AD} = 2x$. Ferner ist das Dreieck ADC wegen der Kongruenz der Winkel bei A bzw. C (je 30°) gleichschenklig, also gilt $\overline{AD} = \overline{CD}$ und somit $\overline{CD} = 2x$, womit die Behauptung bewiesen ist (Abb. L. 922).

30 05 61-1

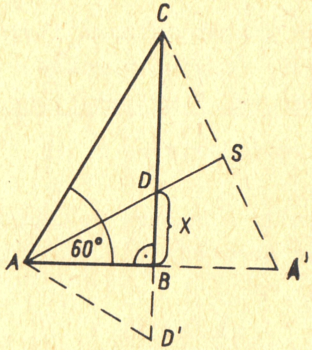

Abb. L 922

923) Lösung: 11 Punkte

(I) Angenommen, ein Trapez ABCD habe die geforderten Eigenschaften. Es seien E, F, G, H die (in dieser Reihenfolge) auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA gelegenen Berührungspunkte der Seiten des Trapezes mit dem Inkreis, also die Fußpunkte der vom Inkreismittelpunkt M auf die Seiten gefällten Lote (Abb. L. 923). Ferner sei $\overline{DG} = x$ und $\overline{AE} = y$.
Da GE Symmetrieachse des Trapezes ist, gilt $\overline{CG} = \overline{DG} = x$ und $\overline{AE} = \overline{BE} = y$. Da die Abschnitte der Tangenten, die von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt an den Kreis gezogen werden, gleichlang sind, gilt $\overline{CF} = \overline{DH} = x$ und $\overline{AH} = \overline{BF} = y$.
Somit folgt $u = 4x + 4y$, also (1) $x + y = 25$ cm.
Fällt man das Lot von C auf AB, so liegt sein Fußpunkt K wegen $\overline{GC} < \overline{EB}$ zwischen A und B.
Nach dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Dreieck KBC, folgt (2) $y - x = \overline{KB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{KC}^2} = \sqrt{(x+y)^2 - (2r)^2} = 7$ cm.
Aus (1) und (2) ergibt sich $x = 9$ cm, $y = 16$ cm.
Daher kann ein Trapez nur dann den gestellten Forderungen genügen, wenn seine Seitenlängen $\overline{AB} = 2y = 32$ cm, $\overline{CD} = 2x = 18$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = x+y = 25$ cm betragen.

(II) Hat ein Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ diese Seitenlängen, so hat es die Eigenschaften $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 100$ cm.
Ferner ist es wegen $\overline{AB} + \overline{CD} = 50 \text{ cm} = \overline{BC} + \overline{AD}$ ein Tangentenviereck, es besitzt also einen Inkreis; dieser hat die Strecke EG als Durchmesser, wobei E, G

die Mittelpunkte von AB, CD sind. Ist K der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, so gilt

$\overline{BK} = \overline{BE} - \overline{CG} = 7$ cm, also

$\overline{GE} = \overline{CK} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2} = 24$ cm.

Daher hat der Inkreis den geforderten Radius 12 cm.

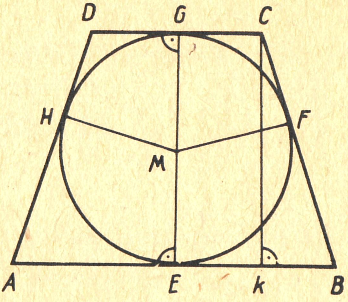

Abb. L 923

Es gibt somit Trapeze der verlangten Art; jedes solche Trapez hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 32$ cm, $\overline{CD} = 18$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 25$ cm.

924) <u>Lösung</u>: <u>13 Punkte</u>

Beim 1. Umlauf werden alle Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 lassen. Die letzte derartige Zahl ist 991. Beim 2. Umlauf wird wegen 991 + 15 - 1000 = 6 die Zahl 6 als erste gestrichen, und weiter alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 6 lassen, also 6, 21, 36, 51, ... Die letzte derartige Zahl ist 996.
Beim 3. Umlauf streicht man wegen 996 + 15 - 1000 = 11 als erste Zahl die 11, und anschließend alle Zahlen, die bei Division durch 15 den Rest 11 lassen, also 11, 26, 41, 56, ... Die letzte derartige Zahl ist 986.
Beim 4. Umlauf müßte man wegen 986 + 15 - 1000 = 1 als erste Zahl die 1 streichen, die aber bereits gestrichen ist. Beim Fortsetzen des Verfahrens trifft man deshalb nur auf Zahlen, die bereits beim 1. Umlauf gestrichen worden sind.

Bei allen Umläufen wurden somit insgesamt die Zahlen 1, 6, 11, 21, 26, ..., 986, 991, 996 gestrichen, also alle Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 1 lassen, mithin in der Form 5n + 1 geschrieben werden können. Da hierbei n alle natürlichen Zahlen von 0 bis 199 durchläuft, gibt es genau 200 Zahlen, die bei dem angegebenen Verfahren durchgestrichen, also genau 800 Zahlen, die nicht durchgestrichen werden.