XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

831) Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus.
In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer.
Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male.
Nach Abschluß aller Spiele stellte man fest:
(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.
(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.
(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wieviele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann?

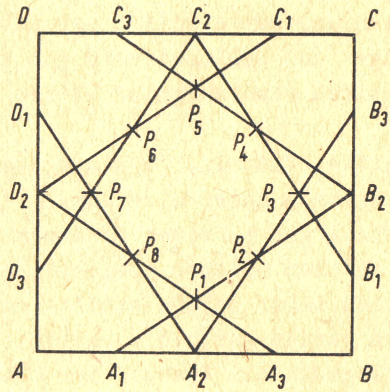
832) Zeige, daß für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)\,p\,(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

833) In dem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet. Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie in Abb. A 833 bezeichnet.

30 05 62-1 (52) 1.65 - 1173

Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

Abb. A 833



A 8;II XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

834) Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung

$$\frac{3a - 2}{a + 1} < 0 \quad \text{erfüllen!}$$

835) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\cancel{\sphericalangle ABC}$ ACB $= 90^\circ$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, daß die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesen Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.
Beweise, daß für seinen Radius r dann $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt!

836) Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen
$a : b : c = 2 : 3 : 4$ und $r = 4$ cm genügt!
Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

30 05 62-1(52) 1.65 - 1173

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

831) <u>Lösung</u>: <u>6 Punkte</u>

Sei z die Gesamtzahl aller Spiele. Da jedes der Mädchen von jeweils 5 Spielen genau 4 mitspielte, spielte jedes Mädchen in $\frac{4}{5}$ z aller Spiele mit. Diese Anzahl ist nach (1) durch 3 und 4, also durch 12 teilbar. Daher gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{4}{5}z = 12n$; hieraus folgt $z = 15n$.
Von den 15n Spielen gewann nach (1) Cathrin genau 6n, Daja genau 4n, Eva genau 3n Spiele.
Somit gewannen Anja und Brigitte zusammen genau 2n aller Spiele. Daraus folgt, daß Eva wegen $6n > 4n > 3n > 2n$ das drittbeste Ergebnis erzielte. Da die Anzahl 3n von Evas Siegen nach (2) eine Primzahl war, gilt $n = 1$.
Es wurden mithin genau 15 Spiele ausgetragen; Cathrin gewann genau 6, Daja genau 4, Eva genau 3 dieser Spiele, und Anja und Brigitte gewannen nach (3) jeweils genau 1 Spiel.

832) <u>Lösung</u>: <u>6 Punkte</u>

Von den fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen p-2, p-1, p, p+1, p+2 ist eine durch 5 teilbar. Da p Primzahl ist und $p > 5$ gilt, ist p nicht durch 5 teilbar. Folglich ist eine der Zahlen p-2, p-1, p+1, p+2 durch 5 teilbar.

Da $p \neq 2$ ist, ist p ungerade. Daher ist jede der beiden Zahlen p-1 und p+1 gerade und eine von beiden ist wenigstens durch 4 teilbar. Folglich ist ihr Produkt durch 8 teilbar.
Da $p \neq 3$ ist, ist p nicht durch 3 teilbar. Mithin sind entweder die beiden Zahlen p-2 und p+1 oder die beiden Zahlen p-1 und p+2 jeweils durch 3 teilbar. Also ist ihr Produkt

durch 9 teilbar. Aus all dem folgt, daß das Produkt $(p-1)(p-1)(p+1)(p+2)$ durch 5, 8 und 9 und, da diese Zahlen paarweise teilerfremd sind, auch durch $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ teilbar ist, w.z.b.w..

833) Lösung: 8 Punkte

Man kann den Flächeninhalt A_8 des Achtecks berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats ABCD den vierfachen Flächeninhalt des Sechsecks $A_2BB_2P_3P_2P_1$ subtrahiert.

Die Fußpunkte der Lote von P_2 auf AB bzw. BC seien E bzw. F. Dann ist $EBFP_2$ ein Quadrat. Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, so gilt nach einem Teil des Strahlensatzes

$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = (\frac{3}{4}a - x) : x$, woraus man

$\frac{3}{2}x = \frac{3}{4}a - x$ und mithin

$\frac{5}{2}x = \frac{3}{4}a$ bzw.

$x = \frac{3}{10}a$ erhält.

Setzt man weiter $\overline{P_1A_2} = y$, so gilt nach dem Strahlensatz

$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a : y$, also

$\frac{3}{2}y = \frac{1}{4}a$ bzw.

$y = \frac{1}{6}a$.

Folglich gilt für den Flächeninhalt A_8 des Achtecks

$$A_8 = (a^2 - 4)\left(\frac{\frac{1}{6}a + \frac{3}{10}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{10}a\right) \cdot 2 + \frac{9}{100}a^2\right) \quad \text{bzw.}$$

$$A_8 = a^2 - \frac{28}{75}a^2 - \frac{9}{25}a^2 = \frac{4}{15}a^2.$$

Der gesuchte Flächeninhalt des Achtecks beträgt $\frac{4}{15}a^2$.

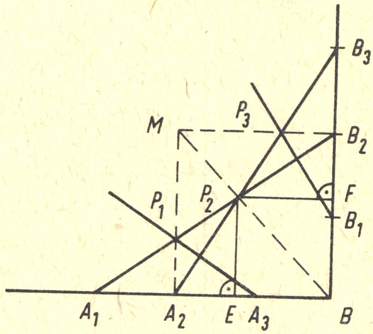


Abb. L 833

Anderer Lösungsweg:

Es sei M der Mittelpunkt des Quadrats (und damit auch der des betrachteten Achtecks). A_2C_2 und BD sind für beide Figuren Symmetrieachsen. Die Fläche des Achtecks läßt sich daher aus den Flächen der untereinander kongruenten Dreiecke P_1MP_2, P_2MP_3, P_3MP_4, P_4MP_5, P_5MP_6, P_6MP_7, P_7MP_8, P_8MP_1 zusammensetzen.

Nun ist der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke, etwa der des Dreiecks P_1MP_2, gleich dem des Quadrates A_2BB_2M minus der Summe der Flächeninhalte des Trapezes $A_2BB_2P_1$ und des Dreiecks BB_2M plus dem des Dreiecks BB_2P_2.

Nun gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle P_1P_2M \sim \triangle B_2P_2B$.

Es sei x der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks P_1P_2M. Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate homologer (gleichliegender) Seiten verhalten, hat wegen

$$\overline{A_2P_1} = \frac{\overline{BB_2} \cdot \overline{A_1A_2}}{\overline{A_1B}} = \frac{a}{6}, \quad \text{also} \quad \overline{P_1M} = \frac{a}{3} \quad \text{und} \quad \overline{BB_2} = \frac{a}{2}$$

das Dreieck B_2P_2M den Flächeninhalt $\frac{9}{4}$ x.

Folglich gilt für den gesuchten Flächeninhalt des Dreiecks P_1P_2M

$$x = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{a}{6} + \frac{a}{2}}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{9}{4}x, \quad \text{also}$$

$$\frac{5}{4}x = a^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right), \quad \text{woraus man}$$

$\frac{5}{4}x = \frac{a^2}{24}$ und schließlich $x = \frac{a^2}{30}$ erhält. Daher beträgt wegen $8 \cdot \frac{a^2}{30} = \frac{4}{15}a^2$ der Flächeninhalt des Achtecks $\frac{4}{15}a^2$.

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

834) Lösung: 7 Punkte

Ein Bruch ist genau dann negativ, wenn entweder sein Zähler positiv und sein Nenner negativ oder wenn sein Zähler negativ und sein Nenner positiv ist.

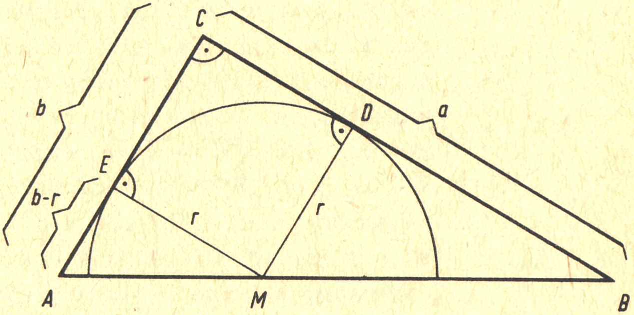
Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl a mit $3a - 2 > 0$ und $a + 1 < 0$. Dann folgt aus $3a - 2 > 0$ einerseits $a > \frac{2}{3}$ und aus $a + 1 < 0$ andererseits $a < -1$. Da es keine rationale Zahl gibt, die gleichzeitig größer als $\frac{2}{3}$ und kleiner als -1 ist, war unsere Annahme falsch.

Daher ist die gegebene Ungleichung genau für diejenigen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $3a - 2 < 0$ und $a + 1 > 0$ gilt. Nun ist $3a - 2 < 0$ gleichbedeutend mit $a < \frac{2}{3}$ und $a + 1 > 0$ mit $a > -1$. Diese beiden Bedingungen werden genau von allen rationalen Zahlen a erfüllt, für die $-1 < a < \frac{2}{3}$ gilt.

Folglich sind alle rationalen Zahlen a mit $-1 < a < \frac{2}{3}$ und nur diese Lösungen der gegebenen Ungleichung.

835) Lösung: 6 Punkte

Abb. L. 835



30 05 62-1 (52) 0.65 - 1173

Der Mittelpunkt des Halbkreises sei M, die Seite BC berühre den Halbkreis in D, die Seite AC berühre ihn in E. Dann gilt:

$\overline{MD} = r$ und $MD \parallel AC$ (rechte Winkel bei D bzw. C) und
$\overline{ME} = r$ und $ME \parallel BC$ (rechte Winkel bei E bzw. C).

Folglich ist MDCE ein Quadrat mit der Seitenlänge r.
Nach dem Strahlensatz gilt nun:

$\frac{a}{r} = \frac{b}{b - r}$, also $ab - ar = br$ bzw. $ab = br + ar$.

Daraus erhält man durch Division mit abr

$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, w.z.b.w..

836) Lösung: 7 Punkte

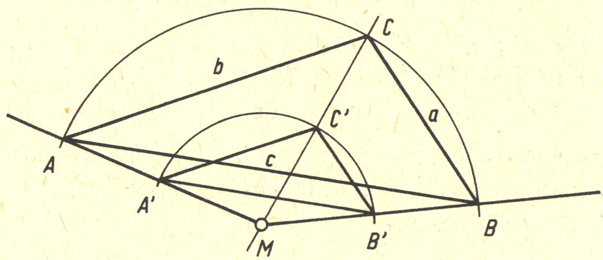


Abb. L 836

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Mittelpunkt seines Umkreises sei M. Dann gibt es ein Dreieck A'B'C', das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M entsteht (A' Bild von A, B' Bild von B, C' Bild von C) und bei dem $\overline{A'B'} = 4$ cm beträgt. Dabei gilt weiter $\overline{A'C'} = 3$ cm, $\overline{B'C'} = 2$ cm. Folglich ist $\triangle ABC$ ähnlich einem Dreieck A'B'C' mit den Seitenlängen a' = 2 cm, b' = 3 cm, c' = 4 cm, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.

(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck A'B'C' mit den Seitenlängen $\overline{B'C'} = 2$ cm, $\overline{C'A'} = 3$ cm, $\overline{A'B'} = 4$ cm, sowie dessen Umkreismittelpunkt M.

(2) Man zeichnet die Strahlen aus M durch A' bzw. B' bzw. C'.

(3) Man schlägt um M den Kreis mit dem Radius r. Schneidet er die in (2) gezeichneten Strahlen, so seien die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge mit A, B, C bezeichnet.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist $\triangle$ABC durch zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $\triangle$A'B'C' hervorgegangen. Daher sind beide Dreiecke ähnlich. Das Dreieck ABC hat also ebenfalls das Verhältnis der Seitenlängen 2 : 3 : 4. Ebenso gilt laut Konstruktion $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = r$, d. h., das Dreieck ABC hat einen Umkreis vom Radius r.

(IV) Da wegen $2 + 3 > 4$; $2 + 4 > 3$ und $3 + 4 > 2$ ein Dreieck A'B'C' mit den angegebenen Seitenlängen existiert, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktionsschritte (2) und (3) sind ebenfalls eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.