A 8

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

821) In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen * durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

```
abc · bac
---------
***b
  **a
  ****
------
******
```

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen * zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

822) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\varrho = 2{,}5$ cm und $\alpha = 50^\circ$! Dabei sei ϱ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

823) Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft: Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

824) Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden. Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, daß g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, daß ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und daß dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, daß dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

821) Lösung: 8 Punkte

Angenommen, es liege eine Eintragung der verlangten Art vor. Dann folgt: Das Produkt aus abc und a ist dreistellig, das aus abc und b vierstellig. Also gilt $a < b$. Wäre nun $a \geqq 3$, so wäre daher $b \geqq 4$ und somit das Produkt aus abc und a vierstellig, im Widerspruch zur Aufgabe. Das Produkt aus abc und a endigt auf a. Wäre $a = 1$, so folgte, daß dieses Produkt auf c endigen würde, im Widerspruhh zu $a \neq c$. Daher und weil a als Anfangsziffer von abc nicht 0 ist, gilt $a = 2$.

Da somit das Doppelte der Zahl abc auf 2 endigt, muß auch das Doppelte von c auf 2 endigen. Das gilt nur für $c = 1$ oder $c = 6$. Da das Produkt aus abc und c vierstellig ist, ist $c \neq 1$.
Also gilt $c = 6$.
Da $246 \cdot 4 = 984$ dreistellig ist, das Produkt aus abc und b aber vierstellig sein soll, gilt $b \neq 4$. Unter den hiernach für b verbleibenden Möglichkeiten 1, 3, 5, 7, 8, 9 erfüllt nur die Zahl 8 die Bedingung, daß das Produkt der auf 6 endenden Zahl mit b auf b endigt. Daher gilt $b = 8$.
Somit kann nur die Eintragung

```
286 · 826
---------
2288
  572
  1716
---------
236236
```

den Anforderungen genügen. Da sie eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe darstellt und da $a = 2$, $b = 8$, $c = 6$ paarweise verschieden sind, erfüllt sie die Bedingungen der Aufgabe.

822) Lösung: 12 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle$ ABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden, d. h. der Mittelpunkt seines Inkreises, und E, F seien die Fußpunkte der Lote von M auf die Seiten BC, CD. Dann hat das Viereck CFME rechte Winkel bei E, C und F und ist daher wegen $\overline{ME} = \overline{MF} = \varrho$ ein Quadrat mit der Seitenlänge ϱ. Die Halbierende des Winkels BAC geht durch M; es gilt $\overline{\sphericalangle FMA} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch F und zweitens auf dem freien Schenkel eines in M an MF nach der Seite der Geraden durch M und E auf der C nicht liegt, angetragenen Winkels der Größe $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Punkt B liegt erstens auf dem Strahl aus C durch E und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, angetragenen Winkels der Größe α.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

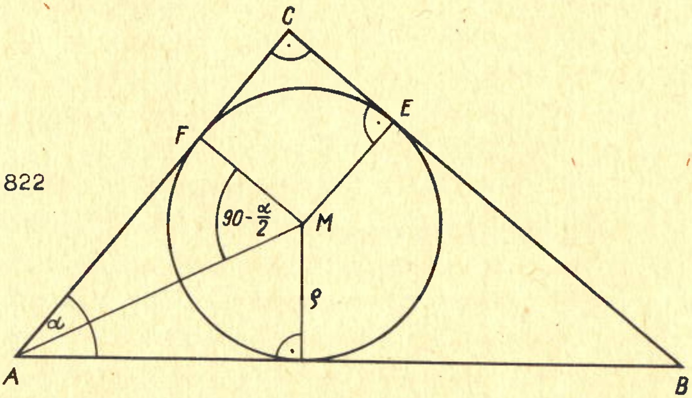
(1) Wir konstruieren das Quadrat CFME mit der Seitenlänge ϱ.
(2) Wir zeichnen den Strahl C durch F.
(3) Wir tragen in M an MF einen Winkel der Größe $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ nach der Seite der Geraden durch M und F an, auf der C nicht liegt. Schneidet sein freier Schenkel den Strahl aus C durch F, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(4) Wir tragen in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, einen Winkel der Größe α an.
(5) Wir zeichnen den Strahl aus C durch E. Schneidet er den freien Schenkel des in (4) konstruierten Winkels, so sei der Schnittpunkt B genannt.

()II) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist der Winkel bei C ein Rechter. Ebenso hat laut Konstruktion der Winkel BAC die Größe α. M hat laut Konstruktion von AC und BC den Abstand ϱ. Da ferner nach Konstruktion $\overline{\sphericalangle CAM} = \overline{\sphericalangle FAM} = \frac{\alpha}{2}$ und

$\sphericalangle \overline{MAB} = \sphericalangle \overline{CAB} - \sphericalangle \overline{CAM} = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ist, ist AB ebenso wie AC Tangente an den Kreis mit ϱ um M. Folglich ist M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar. Ferner ist wegen $0^\circ < 90^\circ - \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ auch (3) eindeutig ausführbar. Danach ist dann (4) und wegen $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ schließlich auch (5) eindeutig ausführbar. Das Dreieck ABC ist also durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Abb. L. 822



<u>Anmerkung</u>: Ein anderer Lösungsweg führt z. B. über die Konstruktion eines ähnlichen Dreiecks aus den gegebenen Winkelgrößen. Nach Konstruktion des Inkreismittelpunktes dieses Dreiecks gewinnt man dann das geforderte Dreieck ABC durch eine geeignete zentrische Streckung mit dem Zentrum M.

823) <u>Lösung</u>: <u>8 Punkte</u>

Angenommen, es gibt eine rationale Zahl r, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{3 - r}{4 + r} = \frac{3}{8}.$$

Daraus folgt $24 - 8r = 12 + 3r$. Also kann höchstens $r = \frac{12}{11}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist

$$\frac{3 - \frac{12}{11}}{4 + \frac{12}{11}} = \frac{\frac{21}{11}}{\frac{56}{11}} = \frac{3}{8},$$ d. h. $r = \frac{12}{11}$ erfüllt die Bedingungen.

824) <u>Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

Die Vierecke EBAC und BFDA sind Sehnenvierecke.
Daher gilt:
$\overline{\sphericalangle ACE} + \overline{\sphericalangle ABE} = 180^\circ$
sowie
$\overline{\sphericalangle ADF} + \overline{\sphericalangle ABF} = 180^\circ$.
Ferner gilt:
$\overline{\sphericalangle ABE} + \overline{\sphericalangle ABF} = 180^\circ$
(Nebenwinkel). Daraus folgt
$\overline{\sphericalangle ACE} + \overline{\sphericalangle ADF} = 180^\circ$
und somit $CE \parallel DF$.
Also ist CEFD ein Parallelogramm, und es gilt
$\overline{CD} = \cancel{\overline{DF}}$, w.z.b.w..
EF

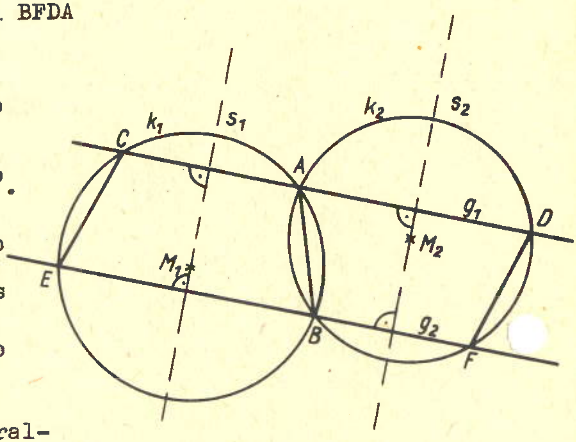


Abb. L 824

<u>Anderer Lösungsweg:</u>
Die zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden aus den Kreisen k_1 und k_2 je zueinander parallele Sehnen aus. Nun seien s_1 bzw. s_2 die Symmetrieachsen dieser beiden Sehnenpaare. Dann gilt $s_1 \parallel s_2$ (wegen $s_1 \perp g_1$ und $s_2 \perp g_1$). Durch Spiegelung an s_1 geht CE in AB und durch Spiegelung an s_2 geht AB in DF über, so daß $CE \parallel DF$ folgt. Somit ist CEFD ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{CD} = \overline{EF}$, w.z.b.w..