A 7;I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

731) Über die Altersangaben (in vollen Lebensjahren) einer Familie (Vater, Mutter und zwei Kinder) ist folgendes bekannt:

(1) Die Summe aller vier Lebensalter beträgt 124.

(2) Vater und Mutter sind zusammen dreimal so alt wie ihre beiden Kinder zusammen.

(3) Die Mutter ist mehr als doppelt so alt wie das älteste der beiden Kinder.

(4) Die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter der Mutter von dem des Vaters subtrahiert, ist neunmal so groß wie die Differenz, die sich ergibt, wenn man das Lebensalter des jüngeren Kindes von dem des älteren Kindes subtrahiert.

Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder?

732) Zeige, daß für jede Primzahl $p \geq 3$ das Produkt $(p+1)p(p-1)$ durch 24 teilbar ist!

733) Konstruiere ein Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ aus $a - c = 3$ cm, $b = 4$ cm, $d = 6$ cm, $e = 9$ cm!

Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

30 05 62-1(52) 1.65 - 1173

A 7;II XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

734) Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen a, die gleich der Hälfte der Summe derjenigen beiden Zahlen sind, die durch zyklische Vertauschung der Ziffern von a entstehen!
Hinweis: Wird die Zahl a durch die Ziffernfolge uvw dargestellt, so entstehen durch zyklische Vertauschung die Zahlen vwu und wuv. Dabei sollen auch Möglichkeiten mit v = 0 oder w = 0 zugelassen werden; die durch zyklische Vertauschung entstehenden Zahlen brauchen also nicht dreistellig zu sein.

735) Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MN}$

736) Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in 27 sec (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Wagens von der Brücke).
An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des genannten Zuges ging, fuhr dieser in 9 sec vorüber. In dieser Zeit hatte der Fußgänger 9 m zurückgelegt.
Ermittle die Länge des Zuges (in Meter) und seine Geschwindigkeit (in Kilometer je Stunde)!

30 05 62-1(52) 1.65 - 1173

L 7;I XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

731) Lösung: 6 Punkte

Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen $2 \cdot 17 > 33$ und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre.
Daraus folgt:
Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere Kind 15 Jahre alt.

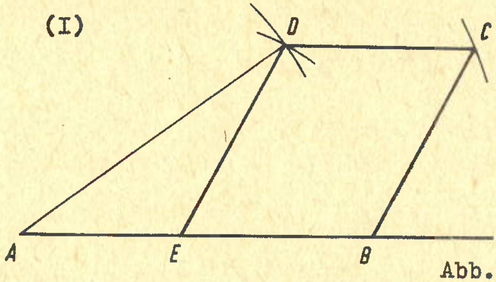
732) Lösung: 6 Punkte

Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $p-1$, $p$, $p+1$ ist stets eine durch 3 teilbar. Wegen $p \geq 3$ ist die Primzahl $p$ ungerade. Folglich sind $p-1$ und $p+1$ unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Da von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden geraden Zahlen stets eine durch 4 teilbar ist, ist von den Zahlen $p-1$ und $p+1$ eine durch 2 und die andere durch 4 teilbar. Somit ist $(p-1)p(p+1)$ durch 3 und durch 8, also, da 3 und 8 teilerfremd sind, auch durch 24 teilbar, w.z.b.w..

30 05 62-1(52) 0.65 - 1173

733) **Lösung:** **8 Punkte**

(I)



Angenommen, ABCD sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Punkt E liege zwischen A und B auf AB und es gelte $\overline{AE} = a - c$.

Abb. L. 733

Dann ist $\overline{EB} = \overline{CD} = c$, und EBCD ist ein Parallelogramm. Nun läßt sich $\triangle$AED aus $\overline{AE}$, $\overline{ED}$ (= $\overline{BC}$) und $\overline{DA}$ konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.

Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.

(II) Daher entspricht ein Trapez ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $\overline{AE} = 3$ cm, $\overline{ED} = 4$ cm und $\overline{AD} = 6$ cm.

(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.

(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.

(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.

(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Trapez ABCD den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist $\overline{AD} = d$.

Weiter ist nach Konstruktion $\overline{AC} = e$. Da EBCD nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich

$\overline{BC}$ (= $\overline{ED}$) = b und, da E zwischen A und B liegt, auch $\overline{AB}$ - $\overline{DC}$ (= $\overline{AB}$ - $\overline{EB}$ = $\overline{AE}$) = a - c.

(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s,s,s) eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $\overline{AC} > \overline{AD}$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar.
Daher ist ein Trapez ABCD durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

L 7;II XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

**Achtung:** Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

734) **Lösung:** **7 Punkte**

Angenommen, eine Zahl mit der Ziffernfolge xyz entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann ist
$a = 100x + 10y + z$ gleich der Hälfte der Summe von
$b = 100y + 10z + x$ und
$c = 100z + 10x + y$. Demnach gilt:
$200x + 20y + 2z = 2a = b + c = 101y + 110z + 11x$, also
$189x = 81y + 108z$
und daher (1) $7x = 3y + 4z$.

Folglich ist 7 ein Teiler von $3y + 4z$ und daher auch von $3y + 4z - 7z = 3(y - z)$, also von $y - z$. Wegen $0 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq z \leqq 9$ folgt hieraus, daß entweder $y = z$ und nach (1) dann $y = z = x \geqq 1$ gilt oder z um 7 größer ist als y.

Daher verbleiben für y und z nur die in der folgenden Tabelle genannten Möglichkeiten, zu denen jedesmal wegen (1) nur das angegebene x gehört:

| y | z | x |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 9 | 9 | 9 |
| 8 | 1 | 4 |
| 7 | 0 | 3 |
| 0 | 7 | 4 |
| 1 | 8 | 5 |
| 2 | 9 | 6 |

Daher können höchstens die Zahlen 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 592, 481, 370, 407, 518, 629 Lösungen sein.

Für 111, ..., 999 ist dies unmittelbar klar; ferner gilt

$\frac{1}{2}$ (925 + 259) = 1184 : 2 = 592; $\frac{1}{2}$ (814 + 148) = 962 : 2 = 481,

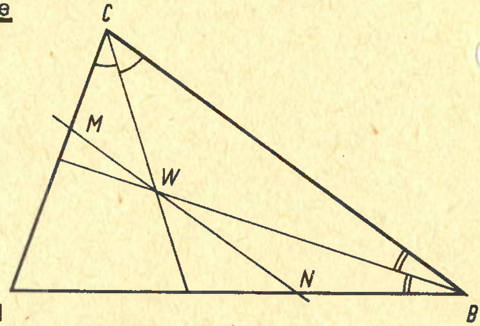
$\frac{1}{2}$ (703 + 37) = 740 : 2 = 370, $\frac{1}{2}$ ( 74 + 740) = 814 : 2 = 407,

$\frac{1}{2}$ (185 + 851) = 1036 : 2 = 518, $\frac{1}{2}$ (296 + 962) = 1258 : 2 = 629.

Also erfüllt jede dieser 15 Zahlen die Bedingungen der Aufgabe.

735) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Abb. L 735




Aus $\sphericalangle CBW = \sphericalangle WBN$ (lt. Voraussetzung)

und $\sphericalangle CBW = \sphericalangle NWB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

folgt

$$\sphericalangle WBN = \sphericalangle NWB .$$

Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt

(1) $\overline{BN} = \overline{NW}$

Analog beweist man (2) $\overline{CM} = \overline{MW}$.

Aus (1) und (2) folgt $\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MW} + \overline{NW}$, also

$\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MN}$, w.z.b.w..

736) <u>Lösung</u>: <u>7 Punkte</u>

Man könnte sich vorstellen, daß der Fußgänger im selben Augenblick die Brücke (entgegengesetzt zur Fahrtrichtung des Zuges) verläßt, in dem die Lok auf die Brücke fährt.

L 7;II

Wenn der Fußgänger nach 9 sec 9 m zurückgelegt hat, fährt der letzte Wagen des Zuges an ihm vorbei. Bis zum Verlassen der Brücke benötigt dieser Wagen wegen 27 - 9 = 18 noch 18 sec. In dieser Zeit legt er wegen 225 + 9 = 234 genau 234 m zurück. Folglich betrug wegen 234 : 18 = 13 die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges 13 $\frac{m}{sec}$, das sind wegen $13 \cdot \frac{3600}{1000} = 46{,}8$ genau 46,8 $\frac{km}{h}$.

Da der Zug zur Brückenüberfahrt 27 sec benötigte, legte die Lok wegen 13 • 27 = 351 in dieser Zeit 351 m zurück. Diese Strecke setzt sich aus den 225 m Länge der Brücke und der Länge des Zuges zusammen. Wegen 351 - 225 = 126 hat der Zug mithin eine Länge von 126 m.