

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind gut lesbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

- 621) Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.

8

Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?

Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

- 622) Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, daß der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).

10

Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

- 623) Klaus hat gehört, daß in einer 6. Klasse von allen Schülern eine Mathematik-Klassenarbeit geschrieben wurde, bei der kein Schüler die Note "5" bekam. Ein Sechstel der Klasse schrieb eine "1", ein Drittel eine "2" und nur ein Neuntel eine "4". Über die Anzahl der Schüler dieser Klasse wußte Klaus nur, daß sie größer als 10, aber kleiner als 40 war. Er fragt sich, wieviel Schüler insgesamt bei der erwähnten Klassenarbeit eine "3" geschrieben hatten.

Stelle fest, ob diese Anzahl mit den in der Aufgabe enthaltenen Angaben eindeutig zu ermitteln ist!

Wenn das nicht der Fall, ist, dann ermittle alle mit den Angaben vereinbaren Antworten auf Klaus' Frage!

- 624) Werner schreibt $50*O*05$ an die Tafel und will danach für jedes der Zeichen $*$ eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so eintragen, daß eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.

Gib sämtliche Möglichkeiten einer derartigen Eintragung (also alle so erhältlichen durch 9 teilbaren Zahlen) an!

*für * auch unterstrichene Ziffern möglich*

XIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
 2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 6

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

621) Lösung: 8 Punkte

Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von 528 cm^2 . Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von 48 cm^2 . Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Daß dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abb. L 621.

(Der Schüler braucht in seiner Zeichnung keine Bemaßung anzugeben.)

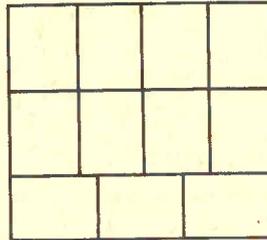


Abb. L 621

622) Lösung: 10 Punkte

Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.

Wegen $5(24^2 + 12^2 + 6^2 + 3^2) - (12^2 + 6^2 + 3^2) = 3\ 636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel $3\ 636 \text{ cm}^2$.

623) Lösung:10 Punkte

Es sei x die Anzahl aller Schüler dieser Klasse. Dann ist x durch 9 teilbar, also wegen $10 < x < 40$ eine der Zahlen 18; 27; 36. Ferner ist x auch durch 6 teilbar, daher entfällt 27.

Für die beiden verbleibenden Möglichkeiten zeigt die nachstehende Tabelle in ihrer 2. bis 4. Spalte die aus den Angaben folgenden Anzahlen von Schülern mit den Noten 1; 2; 4. In der 5. Spalte stehen alle mit den Angaben vereinbaren Anzahlen von Schülern mit der Note "3". Klaus konnte die gesuchte Anzahl also nicht eindeutig ermitteln.

Klassenstärke	Anzahl der Schüler mit der Note			
	1	2	4	3
18	3	6	2	7
36	6	12	4	14

624) Lösung:12 Punkte:

Die Summe der für die Zeichen * einzutragenden Ziffern ist mindestens 0 und höchstens 18. Die Quersumme der Zahl ohne diese Ziffern beträgt 10. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist daher mindestens 10 und höchstens 28.

Andererseits gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Daher entspricht eine Eintragung genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn die Quersumme der entstehenden Zahl entweder 18 oder 27 beträgt, also genau dann, wenn die Summe der beiden einzutragenden Ziffern gleich 8 oder gleich 17 ist.

Folglich gibt es genau die folgenden den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden durch 9 teilbaren Zahlen:

5 000 805, 5 010 705, 5 020 605, 5 030 505, 5 040 405,
 5 050 305, 5 060 205, 5 070 105, 5 080 005, 5 080 905,
 5 090 805.