A 11/12; I XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1241) Man untersuche, ob unter allen Paaren (a,b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a,b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

1242) Es sind alle Paare (x,y) ganzer Zahlen anzugeben, für die die Gleichung $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ erfüllt ist.

1243) Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1244) Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (3;4;0) bzw. (10;8;4).

Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so daß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

1245) Jemand schrieb auf die 6 Flächen eines Würfels je eine reelle Zahl, wobei sich unter diesen 6 Zahlen die Zahlen 0 und 1 befanden. Danach ersetzte er jede dieser 6 Zahlen durch das arithmetische Mittel der 4 Zahlen, die zuvor auf den 4 benachbarten Flächen gestanden hatten. (Dabei merkte er sich jede alte, zu ersetzende Zahl auch, nachdem sie ersetzt war, so lange, wie sie noch zur Mittelbildung für die Zahlen ihrer Nachbarflächen herangezogen werden mußte.)

Mit den 6 so entstandenen neuen Zahlen wiederholte er diese Operation. Insgesamt führte er sie fünfundzwanzigmal durch. Zum Schluß stellte er fest, daß er auf jeder Fläche wieder die gleiche Zahl wie zu Beginn stehen hatte.

Konnte er dieses Ergebnis bei richtiger Rechnung erhalten?

A 11/12; II

Von den nachstehenden Aufgaben 1246A und 1246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1246A) Man zeige, daß der Term $\frac{(14 + \cos x)\sin x}{9 + 6\cos x}$ im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ eine gute Näherung für den Term x darstellt, indem bewiesen wird, daß für alle x in dem angegebenen Intervall der Betrag der Differenz beider Terme kleiner als 10^{-4} ist.

<u>Anmerkung:</u> Es gilt $\pi = 3{,}14159 + \delta$ mit $0 < \delta < 10^{-5}$ und $\sqrt{2} = 1{,}41421 + \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 10^{-5}$.

1246B) In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreis~~e~~flächen k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ so, daß B auf dem Rand von k_1 und C auf dem Rand von k_2 liegen.

a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.

b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solche Dreiecke gibt.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

1241) **Lösung:** **5 Punkte**

Für alle positiven reellen Zahlen a,b gilt

$$f(a,b) = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + 2$$

$$\geqq \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = 2.$$

Dabei kann das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0$ ist, woraus (wegen $a,b > 0$) $a = b$ folgt.

Umgekehrt gilt für $a = b$ sowohl $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 0$ als auch $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$, also das ebengenannte Gleichheitszeichen.

Somit nimmt f(a,b) den Wert 2 als kleinsten an.

1242) **Lösung:** **6 Punkte**

Angenommen, (x,y) sei ein Paar der geforderten Art. Dann ist $u = x+4$ eine ganze Zahl, die
$(u-4)(u-3)(u+3)(u+4) = y^2$, also $(u^2 - 9)(u^2 - 16) = y^2$ (1)
erfüllt. Für $t = u^2 - \frac{25}{2}$ ist dann 2t ganz, und es gilt
$(t + \frac{7}{2})(t - \frac{7}{2}) = y^2$, also $(2t)^2 - (2y)^2 = 49$ bzw.
$(2t + 2y)(2t - 2y) = 49$ (2).
Also kann $(2t + 2y)$ nur eine der Zahlen 49, 7, 1, -1, -7, -49 sein. Die Werte, die sich daraus für die zuvor genannten Größen ergeben, zeigt die folgende Tabelle, aus der zugleich ersichtlich ist, daß durch die gefundenen Werte für x und y auch die vorgegebene Gleichung erfüllt wird:

$2t+2y$	$2t-2y$	t	y	u^2	u	x	$x(x+1)(x+7)(x+8)$	y^2
49	1	12,5	12	25	5	1	$1\cdot2\cdot8\cdot9$	144
					-5	-2	$(-9)\cdot(-8)\cdot(-2)\cdot(-1)$	144
7	7	3,5	0	16	4	0	$0\cdot1\cdot7\cdot8$	0
					-4	-8	$(-8)(-7)(-1)\cdot0$	0
1	49	12,5	-12	25	5	1	$1\cdot2\cdot8\cdot9$	144
					-5	-9	$(-9)(-8)(-2)(-1)$	144
-1	-49	-12,5	12	0	0	-4	$(-4)(-3)\cdot3\cdot4$	144
-7	-7	-3,5	0	9	3	-1	$(-1)\cdot0\cdot6\cdot7$	0
					-3	-7	$(-7)(-6)\cdot0\cdot1$	0
-49	-1	-12,5	-12	0	0	-4	$(-4)(-3)\cdot3\cdot4$	144

Die gegebene Gleichung ist mithin genau für die folgenden geordneten Paare ganzer Zahlen (x,y) erfüllt:
$(1,12)$; $(-9,12)$; $(0,0)$; $(-8,0)$; $(1,-12)$; $(-9,-12)$; $(-4,12)$; $(-1,0)$; $(-7,0)$; $(-4,-12)$.

1243) Lösung: 8 Punkte

Es seien $k_1,\ldots, k_n$ paarweise verschiedene Kreise auf der Kugeloberfläche. Die Anzahl der Gebiete, in die die Oberfläche durch $k_1,\ldots, k_i$ zerlegt wird, sei a_i $(i = 1,\ldots,n)$. Der Kreis k_{i+1} schneide m_i der Kreise $k_1,\ldots, k_i$ $(i = 1,\ldots,n-1)$. Dann gilt $a_{i+1} \leqq a_i + 2m_i$, und darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn k_{i+1} jeden der m_i Kreise, die er schneidet, in zwei voneinander und von allen Schnittpunkten der Kreise $k_1,\ldots, k_i$ verschiedenen Punkten schneidet. Denn gelten diese Bedingungen, so liegen auf k_{i+1} genau $2m_i$ verschiedene Schnittpunkte mit je einem der $k_1,\ldots, k_i$, und der Bogen von jedem dieser Schnittpunkte bis zum nächsten (bezüglich der Anordnung, die sich mit einer Durchlaufung von k_{i+1} ergibt) zerlegt je genau ein vorher vorhandenes Gebiet in genau zwei neue, gibt also Anlaß dazu, a_i um genau 1 zu vergrößern.
Sind jedoch nicht alle diese Bedingungen erfüllt, so liegen auf k_{i+1} weniger als $2m_i$ Schnittpunkte, und es entstehen weniger neue Gebiete.

Also wird, wenn es Kreise $k_1, \dots, k_n$ gibt, von denen jeder jeden anderen in zwei Punkten derart schneidet, daß durch jeden dieser Schnittpunkte genau zwei der Kreise gehen, der größtmögliche Wert von a_n als diejenige Zahl angenommen, die sich rekursiv aus

$a_{i+1} = a_i + 2i \quad (i = 1, \dots, n-1)$ ergibt.

Diese Rekursion führt auf

$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1,$

$a_3 = a_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2,$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$

$a_n = a_1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot (n-1)$ als größtmöglichen Wert von a_n, falls es Kreise $k_1, \dots, k_n$ in der geschilderten Lage gibt.

Das ist nun tatsächlich der Fall, wie z. B. aus Abb. L 1243 ersichtlich ist ($k_1, \dots, k_n$ sind gleichgroße Kreise mit genügend kleinem Radius gegenüber dem Kugelradius und mit äquidistant so dicht beieinander auf einem und demselben Großkreis liegenden Mittelpunkten, daß noch die beiden äußersten Kreise k_1 und k_n sich zweimal schneiden).

Nun ist $a_1 = 2$, und damit erhält man als die gesuchte größte Gebietszahl $a_n = 2 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + (n-1)) = 2 + (n-1)n$.

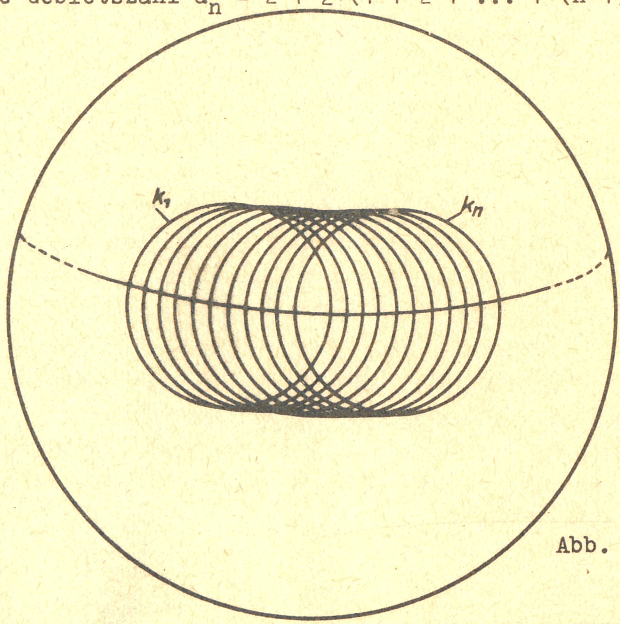

Abb. L 1243

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

121244) **Lösung:** **5 Punkte**

Zur Vereinfachung der Darstellung wird die Schreibweise: Punkt + Vektor = Punkt benutzt.

Für den Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ gilt:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(10-3)^2 + (8-4)^2 + 4^2} = 9.$$

Zwei Punkte P_3 und P_4, die der Aufgabenstellung genügen, existieren genau dann, wenn ein Vektor $\overrightarrow{P_1P_4}$ mit ganzrationalen Koordinaten existiert, für den $\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = 9$ (1)

und $\overrightarrow{P_1P_4} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ (2) ist.

Denn existieren P_3, P_4, so hat $\overrightarrow{P_1P_4}$ die genannten Eigenschaften, und existiert umgekehrt $\overrightarrow{P_1P_4}$, so erhält man mit

(3) $P_4 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_4}$ und $P_3 = P_2 + \overrightarrow{P_1P_4}$ zwei Punkte, die offensichtlich der Aufgabenstellung genügen.

Angenommen, der Vektor $\overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit ganzrationalen x, y, z erfülle die Bedingungen (1) und (2), dann erhält man das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 81 \\ 7x + 4y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} (4).$$

Aus diesem Gleichungssystem folgt

$$(5) \qquad z = -\left(y + \frac{7}{4}x\right)$$

$$x^2 + y^2 + \left(y + \frac{7}{4}x\right)^2 = 81, \text{ also}$$

$$y^2 + \frac{7}{4}xy + \frac{65}{32}x^2 - \frac{81}{2} = 0, \text{ woraus man}$$

$$y_{1,2} = -\frac{7}{8}x \pm \sqrt{\frac{49}{64}x^2 - \frac{65}{32}x^2 + \frac{81}{2}} \text{ bzw.}$$

$$= \frac{1}{8}\left(-7x \pm \sqrt{81 \cdot 32 - 81x^2}\right) \text{ bzw.}$$

$$(6) \qquad = \frac{1}{8}\left(-7x \pm 9\sqrt{32 - x^2}\right) \text{ erhält.}$$

Da x und y ganzrationale Zahlen sind, folgt aus (6), daß auch $\sqrt{32 - x^2}$ rational und daher $32 - x^2$ eine Quadratzahl ist. Das ist nur für $x_{1,2} = \pm 4$ der Fall. Man erhält daraus für y:

$y_{11} = 1;\ y_{21} = -8;\ y_{12} = 8;\ y_{22} = -1.$

Aus (5) ergeben sich die zugehörigen Werte für z:

$z_{11} = -8;\ z_{21} = 1;\ z_{12} = -1;\ z_{22} = 8.$

Durch Einsetzen in das Gleichungssystem (4) bestätigt man, daß diese Werte Lösungen sind. Da sie außerdem ganzrational sind, gibt es mithin genau 4 Quadrate, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Aus (3) erhält man ihre Eckpunkte:

$P_{31}(14;9;-4),\ P_{41}(7;5;-8)$;

$P_{32}(14;0;5),\ P_{42}(7;-4;1)$;

$P_{33}(6;16;3),\ P_{43}(-1;12;-1)$;

$P_{34}(6;7;12),\ P_{44}(-1;3;8)$.

1245) Lösung: 8 Punkte

Angenommen, die durch die beschriebene Operation neu entstandenen Zahlen wurden jeweils auf einen neuen Würfel geschrieben. Dann hätte man auf diese Weise 26 Würfel mit Zahlen beschrieben. Es sei nun m_i die größte der Zahlen des i-ten Würfels ($i = 1,2,\ldots,26$). Da das arithmetische Mittel reeller Zahlen bekanntlich nicht größer als die größte dieser Zahlen ist, gilt nun

$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \ldots \geq m_{26}.$

Angenommen, das Ergebnis wäre bei richtiger Rechnung zu erhalten. Dann hätten sich auf dem 26. Würfel die gleichen Zahlen wie auf dem 1. Würfel ergeben. Folglich müßte $m_{26} = m_1$ und damit $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \ldots = m_{26}$ gelten. Also hätte u.a. auf einer der 6 Flächen des 3. Würfels m_1 gestanden. Mithin wäre m_1 das arithmetische Mittel der Zahlen b_1, b_2, b_3, b_4 auf den benachbarten Flächen des 2. Würfels, also müßte gelten:

$m_1 = \frac{1}{4}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$. Hieraus folgt

$4m_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ bzw.

(1) $(m_1 - b_1) + (m_1 - b_2) + (m_1 - b_3) + (m_1 - b_4) = 0.$

Wegen $b_i \leqq m_1$ $(i = 1,2,3,4)$ folgt aus (1):

$m_1 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4$, d.h. auf 4 der Flächen des 2. Würfels hätte die gleiche Zahl m_1 gestanden. Analog hätte dann aber auf allen 6 Flächen des 1. Würfels die Zahl m_1 gestanden, was laut Aufgabe nicht der Fall war.
Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme falsch war. Das genannte Ergebnis konnte somit nicht durch richtige Rechnung erhalten werden.

1246A) Lösung: 8 Punkte

Es sei $f(x) = x - \frac{(14 + \cos x)\sin x}{9 + 6\cos x}$. Dann gilt:

$$f(x) = 1 - \frac{(14\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)(9+6\cos x)-(14\sin x+\sin x\cos x)(-6\sin x)}{(9+6\cos x)^2}$$

$$= \frac{81+108\cos x+36\cos^2 x-126\cos x-84\cos^2 x-9\cos^2 x-6\cos^3 x}{(9+6\cos x)^2}$$

$$+ \frac{9(1-\cos^2 x)+6\sin^2 x\cos x-84\sin^2 x-6\sin^2 x\cos x}{(9+6\cos x)^2}$$

$$= \frac{6 - 18\cos x + 18\cos^2 x - 6\cos^3 x}{(9+6\cos x)^2}$$

$$= \frac{2(1 - 3\cos x + 3\cos^2 x - \cos^3 x)}{3(3 + 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{2(1 - \cos x)^3}{3(3 + 2\cos x)^2} .$$

Für $0 < x \leqq \frac{\pi}{4}$ gilt $1 - \cos x > 0$, also $f'(x) > 0$. Folglich ist $f(x)$ in dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ streng monoton wachsend. Daher und wegen $f(0) = 0$ gilt in diesem Intervall
$0 \leqq f(x) \leqq f(\frac{\pi}{4})$.

Man erhält $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{14+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{9+3\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{41\sqrt{2} - 25}{42}$.

Nun gilt wegen $\pi < 3,1416$ und $\sqrt{2} > 1,41421$ $\quad \frac{\pi}{4} < 0,7854$

$$\frac{41\sqrt{2} - 25}{42} > \frac{41 \cdot 1,41421 - 25}{42} > 0,7853, \text{ also}$$

$f(\frac{\pi}{4}) < 0,7854 - 0,7853 = 0,0001 = 10^{-4}$, d.h. der Betrag der Differenz von x und $\frac{(14 + \cos x)\sin x}{9 + 6\cos x}$ ist für alle x in dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ kleiner als 10^{-4}, w.z.b.w..

1246B) Lösung: 8 Punkte

(I) Angenommen, ein Dreieck $\triangle ABC$ habe die verlangten Eigenschaften, dann geht B durch eine Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60° in C über. Ist k_1' das Bild von k_1 bei dieser Drehung, so ist folglich C ein gemeinsamer Punkt von k_1' und k_2.

(II) Daher hat ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann die verlangten Eigenschaften, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere den Strahl s aus A durch den Mittelpunkt M_1 von k_1.

(2) Dann trage man in A an s einen Winkel der Größe 60° an.

(3) Sein freier Schenkel schneidet den Kreis um A durch M_1 in einem Punkt M_1'.

(4) Hat der Kreis k_1' um M_1' mit dem Radius von k_1 einen gemeinsamen Punkt C mit dem Kreis k_2, so errichte man

(5) über AC dasjenige gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$, für das die Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60°, die B in C überführt, gleichsinnig ist zu der Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60°, die M_1 in M_1' überführt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ die verlangten Eigenschaften hat:

Nach (II)(5) ist $\triangle ABC$ gleichseitig, ferner liegt C nach (II)(4) auf k_2. Außerdem liegt C noch auf k'_1, und diejenige Drehung mit dem Drehpunkt A und einem Drehwinkel der Größe 60°, die zu den in (II)(5) genannten Drehungen gegensinnig ist, führt C in B sowie k'_1 in k_1 über. Folglich liegt B auf k_1.

b) Konstruktionsschritt (II)(1) ist stets eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (II)(2) stets auf genau zwei verschiedene Weisen. Da Konstruktionsschritt (II)(3) wiederum eindeutig ausführbar ist, erhält man durch die Schritte (1),(2),(3) somit genau zwei verschiedene Punkte M_{11} und M_{12}. Jeder der beiden folglich bei (4) entstehenden Kreise k'_{11}, k'_{12} kann nun, wenn er nicht unendlich viele gemeinsame Punkte mit k_2 hat, höchstens zwei Punkte mit k_2 gemeinsam haben. Die gesuchte größte Anzahl kann daher höchstens 4 betragen. Daß sie genau 4 beträgt, ist bewiesen, wenn man eine spezielle Lage von A, k_1, k_2 angeben kann, die alle Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt und zu genau 4 gemeinsamen Punkten führt. Dies ist z.B. folgendermaßen möglich:
Es seien $M_1M'_{11}PQRM'_{12}$ ein regelmäßiges Sechseck mit dem Mittelpunkt A und N_1, N'_{11}, N'_{12} die Mittelpunkte der Strecken AM_1 bzw. AM'_{11} bzw. AM'_{12}. Ferner seien k_1, k'_{11}, k'_{12} die Kreise um M_1 bzw. M'_{11} bzw. M'_{12} durch N'_{11} (und N'_{12}) bzw. N_1 bzw. N_1. Der Punkt A liegt außerhalb dieser drei Kreise, da AM_1 gemeinsame Tangente von k'_{11} und k'_{12} und AM'_{11} Tangente an k_1 ist. Schneiden ferner k'_{11} bzw. k'_{12} die Strecke $M'_{11}P$ bzw. $M'_{12}R$ in C_{11} bzw. C_{21}, so liegen A und Q auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C_{11} und C_{21}. Diese schneide AQ in D. Wählt man nun einen Punkt E zwischen A und D, so liegt der Mittelpunkt des Kreises k_2 durch E, C_{11}, C_{21} auf dem Strahl aus E durch Q, und folglich liegt A außerhalb k_2. Ferner schneidet k_2 den Kreis k'_{11} außer in C_{11} noch in einem Punkt C_{12}. Würde

er ihn nämlich nur in C_{11} berühren, so müßte die Gerade durch C_{11} und C_{21} gemeinsame Tangente von k_2 und k'_{11} sein, könnte also mit k_2 keinen zweiten Punkt gemeinsam haben. Entsprechendes gilt für k'_{12}, so daß in der Tat genau 4 verschiedene Punkte C_{ik} $(i,k = 1,2)$ entstanden sind. (Abb. L 1246B)

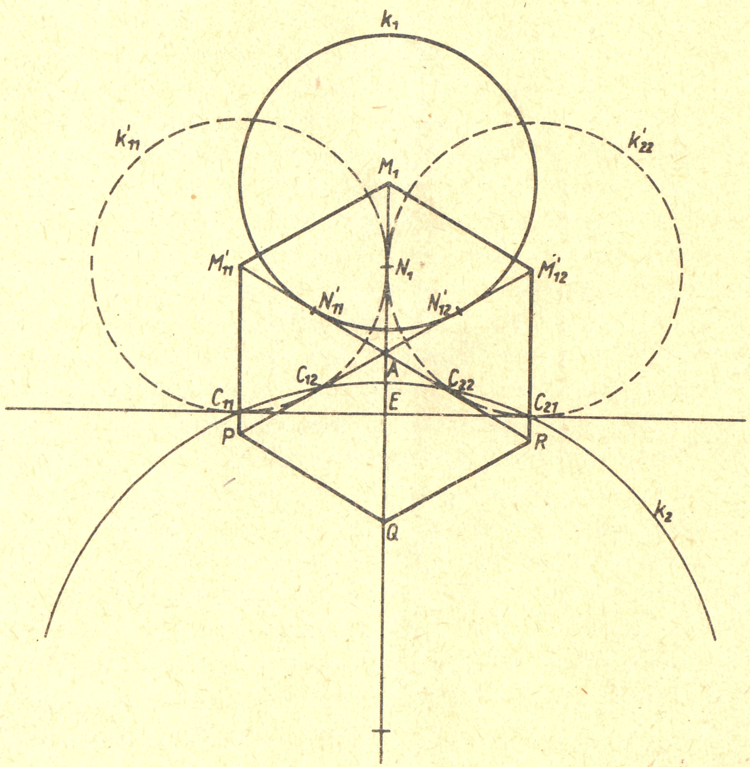

Abb. L 1246B