A 11/12;I XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1231) Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und die Gleichung $\tan x + \cot x = 4$ erfüllen. (Eine Ausrechnung der Zahlenwerte als Dezimalbrüche wird nicht verlangt.)

1232) Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in einer und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleichweit entfernt sind.

1233) Drei Schulen, je eine aus Adorf, Bedorf und Cedorf, führten bei einem Kreissportfest einen Leichtathletikwettkampf durch. In jeder Disziplin stellte jede Schule genau einen Teilnehmer. Ein Reporter interviewte nach dem Wettkampf einen Zuschauer:

Reporter: "Wer hat den gesamten Wettkampf gewonnen?"

Zuschauer: "Adorf gewann den Weitsprung, aber den gesamten Wettkampf gewann Bedorf, und zwar mit 22 Punkten. Adorf und Cedorf erreichten je 9 Punkte."

R.: "Wie wurden die Punkte verteilt?"

Z.: "In jeder der Disziplinen erhielt der Erste eine bestimmte Punktzahl, der Zweite eine kleinere, der Dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Diese Verteilung war für alle Disziplinen dieselbe. Alle Punktzahlen waren ganzzahlig."

R.: "In wieviel Disziplinen fand der Wettkampf insgesamt statt?"

Z.: "Ich weiß es nicht."

R.: "Wer hat das Kugelstoßen gewonnen?"

Z.: "Ich weiß es nicht, aber Kugelstoßen war dabei."

Ermitteln Sie, ob die folgenden beiden Fragen auf Grund dieser (sämtlich als wahr vorausgesetzten) Aussagen eindeutig beantwortet werden können, und geben Sie alle Antworten, die mit diesen Aussagen vereinbar sind, an!

a) Welche der drei Schulen gewann das Kugelstoßen?
b) Welche Schule belegte beim Weitsprung den zweiten Platz?
(Es sei bekannt, daß in jeder der Disziplinen eine eindeutige Reihenfolge der Wettkampfteilnehmer ermittelt wurde.)

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1234) Es seien a und b natürliche Zahlen, für die $0 \leqq b < a$ gilt. Ferner sei durch $z_n = an + b$ $(n = 0,1,2,\dots)$ eine Folge natürlicher Zahlen gegeben. Ein Element z_m dieser Folge habe mit a den größten gemeinsamen Teiler d.

Es ist festzustellen, ob dann alle Elemente dieser Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d haben.

1235) Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist. Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n $(n \geqq 4)$ an, für die das gilt.

A 11/12;II

Von den folgenden Aufgaben 1236A und 1236B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

1236A) Es sei f eine Funktion, die für alle reellen Zahlen x definiert ist und die folgende Eigenschaften hat:

(1) Für alle x gilt $f(x) = xf(x+1)$;

(2) Es gilt $f(1) = 1$.

a) Man ermittle alle ganzen Zahlen n, für die $f(n) = 0$ gilt.

b) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen, und es sei $f(x+m)$ gegeben. Man berechne $f(x+n)$.

c) Man gebe eine spezielle Funktion f_o an, die die obigen Eigenschaften besitzt, und zeichne den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$.

1236B) Ist n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so seien auf einer Strecke AB Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2n-1}$ in dieser Reihenfolge so gelegen, daß sie die Strecke AB in 2n Teile gleicher Länge zerlegen.

a) Man gebe (als Funktion von n) die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß zwei aus den Punkten $P_1, \ldots, P_{2n-1}$ ausgewählte Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ die Strecke AB derart zerlegen, daß sich aus den drei Teilstrecken AP_k, P_kP_m, P_mB ein Dreieck konstruieren läßt.

b) Man untersuche, ob diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert konvergiert, und ermittle, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert.

Anmerkung: Die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert:
Jede Auswahl zweier Punkte P_k, P_m mit $0 < k < m < 2n$ sei als ein "Fall" bezeichnet. Ein "Fall" heiße ein "günstiger Fall", wenn P_k und P_m so gewählt sind, daß sich aus den Strecken AP_k, P_kP_m und P_mB ein Dreieck bilden läßt. Ist dann z die Anzahl aller möglichen "Fälle" und z_1 die Anzahl aller "günstigen Fälle", so wird die genannte Wahrscheinlichkeit als der Quotient $\frac{z_1}{z}$ definiert.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1231) <u>Lösung:</u> <u>5 Punkte</u>

Eine reelle Zahl x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ erfüllt genau dann die Gleichung (1) $\tan x + \cot x = 4$, wenn sie jede der folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4, \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 4, \quad \frac{2}{\sin 2x} = 4,$$

(2) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Eine reelle Zahl 2x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (oder gleichbedeutend hiermit $0 < 2x < \pi$) erfüllt (2) genau dann, wenn $2x = \frac{\pi}{6}$ oder $2x = \frac{5\pi}{6}$ ist.

Daher sind alle reellen Zahlen x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, die (1) erfüllen $x = \frac{\pi}{12}$ und $x = \frac{5\pi}{12}$.

<u>Anmerkung:</u> Die Lösung kann auch mit Hilfe rationaler Näherungswerte ermittelt werden (etwa über $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 4$ und daraus folgend $\tan x_1 = 3{,}732$, $\tan x_2 = 0{,}268$).

1232) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I) Angenommen, ε sei eine Ebene mit der genannten Eigenschaft. Lägen P_1, P_2, P_3, P_4 auf derselben Seite von ε oder Läge einer (und daher nach Annahme alle) der Punkte in ε, so lägen alle diese Punkte in einer zu ε parallelen Ebene, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es genau die folgenden beiden Möglichkeiten:

1) Einer der Punkte, es sei o.B.d.A. der Punkt P_1, liegt auf einer Seite von ε, die anderen drei auf der anderen Seite. Die Lote von P_2, P_3, P_4 auf ε sind dann einander gleichsinnig parallel und gleichlang,

das Lot von P_1 auf ε ist zu ihnen gegensinnig parallel und gleichlang. Da P_2, P_3, P_4 nicht auf ein und derselben Geraden liegen (sonst lägen sie ja mit P_1 in derselben Ebene), gibt es genau eine Ebene δ durch P_2, P_3, P_4. Diese ist folglich parallel zu ε, und ihr Abstand von P_1 ist doppelt so groß wie die genannten Lote. Somit ist ε (im vorliegenden Fall) eindeutig charakterisiert als die zu δ parallele Ebene durch den Mittelpunkt des Lotes von P_1 auf δ.

2) Zwei der Punkte, es seien o.B.d.A. die Punkte P_1 und P_2, liegen auf einer Seite von ε, die beiden anderen auf der anderen Seite.
Da $P_1 \neq P_2$ und $P_3 \neq P_4$ ist, gibt es je genau eine Gerade g durch P_1 und P_2 bzw. h durch P_3 und P_4. Die Lote von P_1 und P_2 auf ε sind einander gleichsinnig parallel und gleichlang; die Lote von P_3 und P_4 auf ε sind zu den vorgenannten Loten gegensinnig (also untereinander gleichsinnig) parallel und zu ihnen (also auch untereinander) gleichlang. Daher ist sowohl g als auch h parallel zu ε, und die zu ε parallelen Ebenen η durch P_1, P_2 sowie ϑ durch P_3, P_4 haben einen doppelt so großen Abstand voneinander wie die Länge der genannten Lote. Schließlich liegen g und h nicht in ein und derselben Ebene, sind also nicht parallel zueinander. Somit kann η eindeutig charakterisiert werden als die durch g gehende und zu h parallele Ebene und ϑ als die durch h gehende und zu g parallele Ebene. Hiernach ist ε (im vorliegenden Fall) eindeutig charakterisiert als die zu den Ebenen η, ϑ parallele Ebene durch den Mittelpunkt eines gemeinsamen Lotes der Ebenen η und ϑ.

II) Umgekehrt hat auch jede der am Ende von 1) und 2) charakterisierten Ebenen ε die verlangte Eigenschaft.

III) Daher sind die in (I) beschriebenen Ebenen sämtliche Ebenen mit der verlangten Eigenschaft.

IV) Nun gibt es genau vier Möglichkeiten, die in 1) genannte Lage zu erreichen, und genau zwei Möglichkeiten, die in 2) genannte Lage zur erreichen. Die somit auf sieben verschiedenen Wegen gefundenen Ebenen ε sind auch untereinander verschieden, da sich je zwei von ihnen bereits darin unterscheiden, welche der Punkte $P_1 \dots P_4$ zusammen auf ein und derselben Seite von ε liegen.

1233) Lösung: 7 Punkte

Es seien
n die Anzahl der Leichtathletikdisziplinen dieses Wettkampfs,
e die Punktzahl für den jeweiligen Ersten,
z die Punktzahl für den jeweiligen Zweiten,
d die Punktzahl für den jeweiligen Dritten in jeder der Einzeldisziplinen.

Da mindestens Weitsprung und Kugelstoßen zum Wettkampf gehörten, ist $n \geqq 2$. Wegen $e > z > d \geqq 1$ gilt $e + z + d \geqq 6$. Da insgesamt $9 + 22 + 9 = 40$ Punkte verteilt wurden, und die Punktverteilung für den Ersten, Zweiten bzw. Dritten in jeder Disziplin dieselbe war, gilt $n \cdot (e + z + d) = 40$. Wegen $n \geqq 2$ und $e+z+d \geqq 6$ und da $40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$ die einzigen ganzzahligen Faktorenzerlegungen von 40 sind, in denen ein Faktor mindestens 2 und der andere mindestens 6 ist, kann n nur eine der Zahlen 2,4,5 sein.

Angenommen, es wäre $n = 2$.
Dann wäre $e+z+d = 20$. Da Adorf den Weitsprung gewann sowie in der zweiten Disziplin mindestens einen Punkt, insgesamt aber nur 9 Punkte erreichte, wäre $e \leqq 8$. Für $e = 8$ wäre wegen der Gesamtpunktzahl 9 von Adorf $d = 1$, also $z = 20 - 8 - 1 = 11$, im Widerspruch zu $e > z$. Für $e \leqq 7$ wäre $z \leqq 6$, $d \leqq 5$, im Widerspruch zu $e+z+d = 20$.
Also gilt $n \neq 2$.

Angenommen, es wäre $n = 4$.
Dann wäre $e+z+d = 10$. Da Adorf den Weitsprung gewann sowie in den übrigen drei Disziplinen mindestens je einen Punkt, insgesamt aber nur 9 Punkte erreichte, wäre $e \leqq 6$. Aus $e = 6$ folgte $z+d = 4$, was wegen $z > d \geqq 1$ auf $z = 3$ und $d = 1$ führt. Wäre Bedorf in höchstens zwei Disziplinen erfolgreich gewesen, so hätte es dadurch höchstens $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 18$ Punkte erreichen können. Bedorf müßte also in genau drei Disziplinen den Sieger gestellt haben. In diesen Disziplinen hätte es 18 Punkte und im Weitsprung 4 Punkte gewonnen haben müssen. Das ist aber wegen $z = 3$ und $d = 1$ nicht möglich.
Für $e \leqq 5$ wäre $z \leqq 4$, also hätte die Punktzahl von Bedorf $3 \cdot 5 + 4 = 19$ nicht überschreiten können. Also gilt $n \neq 4$.

Daher kann nur $n = 5$ sein.
Dann ist $e+z+d = 8$. Da Adorf den Weitsprung gewann sowie in den vier übrigen Disziplinen mindestens je einen Punkt und insgesamt 9 Punkte erreichte, ist $e \leqq 5$. Für $e \leqq 4$ wäre $z \leqq 3$, also hätte die Punktzahl von Bedorf $4 \cdot 4 + 3 = 19$ nicht überschreiten können. Somit gilt $e = 5$, also $z+d = 3$, was wegen $z > d = 1$ auf $z = 2$ und $d = 1$ führt
Wäre Bedorf in höchstens drei Disziplinen erfolgreich gewesen, so hätte es dadurch höchstens $3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$ Punkte erreichen können. Bedorf hat also in genau vier Disziplinen den Sieger gestellt. In diesen Disziplinen hat es somit 20 Punkte und daher im Weitsprung 2 Punkte gewonnen. Folglich gewann Bedorf das Kugelstoßen und belegte im Weitsprung den zweiten Platz. Diese Antworten sind zugleich die einzigen, die mit den in der Aufgabe genannten Aussagen vereinbar sind, d.h. die beiden Fragen können eindeutig beantwortet werden.

(Anmerkung: Da die Existenz einer Punktverteilung, mit der alle Aussagen vereinbar sind, der Aufgabenstellung entnommen werden kann, ist eine "Probe" nicht erforderlich.)

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

1234) Lösung: 6 Punkte

Für jedes Element z_ν der Folge (ν eine der Zahlen 0,1,2,...) gilt:

(1) d ist (als ein gemeinsamer Teiler von a und z_n auch) ein gemeinsamer Teiler von a und $z_n + (\nu - n)a = z_\nu$.

(2) Ist t ein gemeinsamer Teiler von a und z_ν, so ist t auch ein gemeinsamer Teiler von a und $z_\nu + (n - \nu)a = z_n$, folglich auch ein Teiler ihres größten Teilers d.

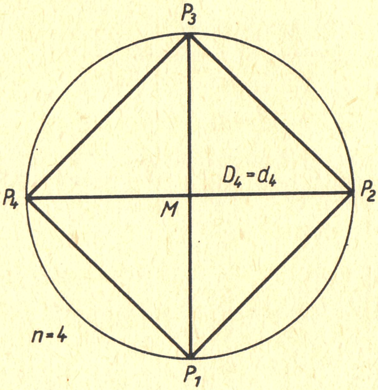
(3) Aus (1) und (2) folgt: Der größte gemeinsame Teiler von a und z_ν ist d.

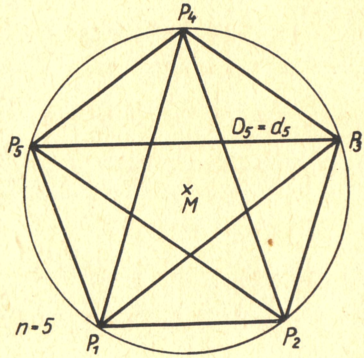
Also haben alle Elemente der Folge mit a den größten gemeinsamen Teiler d.

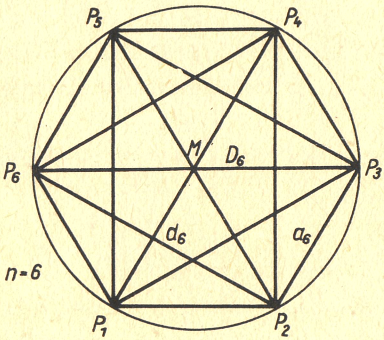
1235) Lösung: 7 Punkte

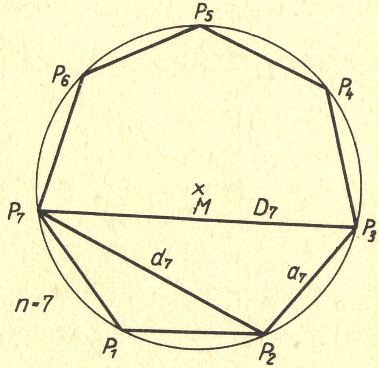
Der Umkreis je eines regelmäßigen n-Ecks, das hier untersucht werden soll, habe o.B.d.A. den Radius 1; es seien s_n die Seitenlänge, d_n die Länge einer kleinsten und D_n die Länge einer größten Diagonale dieses n-Ecks $P_1P_2P_3...P_n$.
Da im regelmäßigen Viereck und im regelmäßigen Fünfeck sämtliche Diagonalen gleichlang sind, haben diese n-Ecke nicht die verlangte Eigenschaft.
Im regelmäßigen Sechseck und im regelmäßigen Siebeneck bilden jeweils eine längste Diagonale, eine geeignete kürzeste Diagonale und eine geeignete Vielecksseite ein Dreieck, so daß wegen der Dreiecksungleichung auch in diesen Fällen die verlangte Eigenschaft nicht auftreten kann (siehe Abb. L 1235).
Es sei nun n = 8. Dann gilt $\overline{P_8P_4} = D_8$ und $\overline{P_1P_3} = d_8$.
Außerdem gilt $P_8P_4 \parallel P_1P_3$, da $P_8P_1P_3P_4$ ein gleichseitiges Trapez ist.

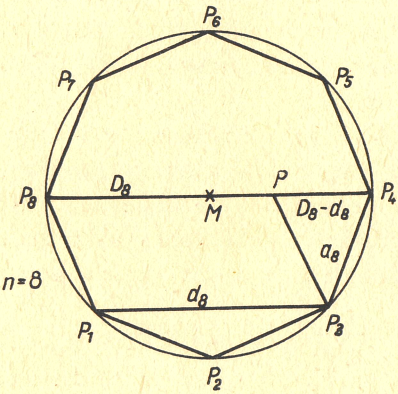
Abb. L 1235

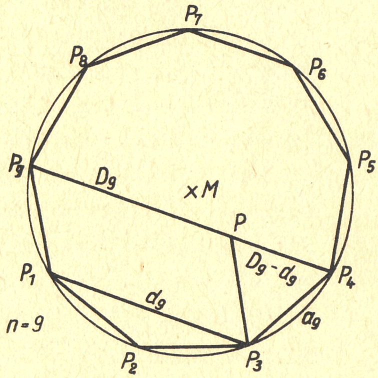

P_3
P_4
$D_4 = d_4$
P_2
M
$n=4$
P_1


P_4
P_5
$D_5 = d_5$
P_3
M
$n=5$
P_1
P_2


P_5
P_4
M
D_6
P_6
P_3
d_6
a_6
$n=6$
P_1
P_2


P_5
P_6
P_4
M
P_7
D_7
P_3
d_7
a_7
$n=7$
P_1
P_2


P_6
P_7
P_5
D_8
P
P_8
P_4
M
$D_8 - d_8$
a_8
$n=8$
d_8
P_1
P_3
P_2


P_7
P_8
P_6
P_9
P_5
D_9
M
P
P_1
$D_9 - d_9$
P_4
d_9
a_9
$n=9$
P_2
P_3

Die Parallele zu P_8P_1 durch P_3 schneide P_8P_4 in einem Punkt, der P genannt sei. Dann gilt $\overline{\sphericalangle P_4PP_3} = \overline{\sphericalangle P_8P_4P_3} =$

$= \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle P_8MP_3} = \frac{3}{2}\cdot 45^\circ > 60^\circ$, also $\overline{\sphericalangle PP_3P_4} < 60^\circ$ und daher

$s_8 = \overline{P_4P_3} > \overline{PP_4} = D_8 - d_8$. Somit hat auch das regelmäßige Achteck nicht die verlangte Eigenschaft.

<u>Es sei nun n = 9.</u> Dann ist $P_9P_1P_3P_4$ ein gleichschenkliges Trapez, für das $P_9P_4 \parallel P_1P_3$ und $\overline{P_9P_4} = D_9$ sowie $\overline{P_1P_3} = d_9$ gilt.

Die Parallele zu P_9P_1 durch P_3 schneide P_9P_4 in einem Punkt, der P genannt sei. Dann gilt $\overline{\sphericalangle P_4PP_3} = \overline{\sphericalangle P_9P_4P_3} =$

$= \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle P_9MP_3} = \frac{3}{2}\cdot 40^\circ = 60^\circ$ und daher $s_9 = \overline{P_4P_3} = \overline{PP_4} =$

$= D_9 - d_9$. Somit hat das regelmäßige Neuneck die verlangte Eigenschaft.

Nun gilt $s_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$, $d_n = 2\sin\frac{2\pi}{n}$ sowie, wenn n gerade ist, $D_n = 2$; wenn n aber ungerade ist, $D_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$.

Somit ist für alle $n > 9$ stets $s_n + d_n < s_9 + d_9 =$

$= D_9 < D_n$, d.h. die verlangte Eigenschaft nicht vorhanden.

Daher hat genau das regelmäßige Neuneck die verlangte Eigenschaft.

1236A) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

a) Wegen $f(1) = 1$ gilt

$$f(0) = 0\cdot f(1) = 0,$$
$$f(-1) = -1\cdot f(0) = 0,$$
$$f(-2) = -2\cdot f(-1) = 0 \text{ usw.}$$

Allgemein gilt $f(-n) = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Andererseits gilt

$$f(1) = 1 \cdot f(2), \text{ also } f(2) = f(1) = 1,$$
$$f(2) = 2\, f(3), \text{ also } f(3) = \frac{1}{2} \cdot f(2) = \frac{1}{2},$$
$$f(3) = 3 \cdot f(4), \text{ also } f(4) = \frac{1}{3} \cdot f(3) = \frac{1}{3!},$$

allg. $f(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ für $n = 1,2,3,\ldots$, wie sich mit Hilfe der vollständigen Induktion leicht nachweisen läßt; denn für $n = 1$ ist diese Behauptung richtig, und aus $f(n) = \frac{1}{(n-1)!}$ folgt $f(n+1) = \frac{1}{n} \cdot f(n) = \frac{1}{n!}$.

<u>Es sei nun $m > n$.</u> Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x+n) &= (x+n) \cdot f(x+n+1) \\ &= (x+n)(x+n+1) \cdot f(x+n+2) \\ &= (x+n)(x+n+1) \cdot \ldots \cdot (x+m-1) \cdot f(x+m). \end{aligned}$$

<u>Es sei $m = n$.</u> Dann gilt

$$f(x+n) = f(x+m).$$

<u>Es sei $m < n$.</u> Dann gilt, falls x eine der ganzen Zahlen $-n+1, \ldots, -m$ ist,

$$f(x+n) = \frac{1}{(x+n-1)!},$$ für jedes andere reelle x aber

$f(x+m) = (x+m)(x+m+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) \cdot f(x+n)$, also, da $(x+m) \neq 0, \ldots, (x+n-1) \neq 0$ ist

$$f(x+n) = \frac{f(x+m)}{(x+m)(x+m+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1)}.$$

c) Es sei beispielsweise f_o die folgendermaßen für alle reellen x definierte Funktion:

$$f_o(x) = 0 \text{ für alle reellen } x \neq 1,2,3,\ldots$$
$$f_o(x) = \frac{1}{(x-1)!} \text{ für } x = 1,2,3,\ldots \quad .$$

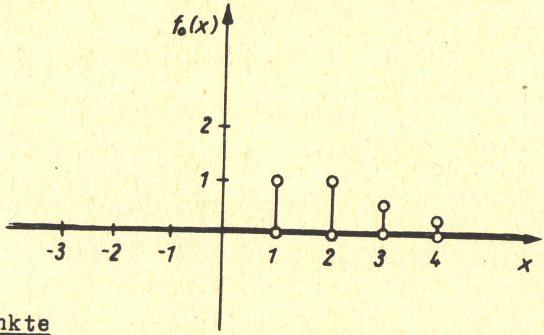
Dann gilt $f_o(1) = 1$, und für alle reellen x mit (1) $x \neq 1,2,3,\ldots$ gilt entweder $x = 0$, also (2) $f_o(x) = 0 = x \cdot f_o(x+1)$, oder außer (1) auch $(x+1) \neq 1,2,3,\ldots$, also ebenfalls (2).

Für alle $x = 1,2,3,\ldots$ gilt aber

$$f_o(x) = \frac{1}{(x-1)!} = x \cdot \frac{1}{x!} = x \cdot f_o(x+1).$$

Die Funktion f_o erfüllt also die gestellten Bedingungen. Den Graph dieser Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 4$ zeigt das folgende Bild:

Abb. L 1236 A



1236B) Lösung: 8 Punkte

a) Ermittlung der Anzahl z aller möglichen "Fälle":
Für k bestehen genau die Möglichkeiten 1,..., 2n-2. Nach der Auswahl einer dieser Möglichkeiten von k bestehen für m genau die Möglichkeiten k+1, ... , 2n-1 ; ihre Anzahl ist 2n-k-1. Alle so erhaltenen "Fälle" sind untereinander verschieden. Daher ist
$z = (2n-2) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}(2n-2)(2n-1) = (n-1)(2n-1).$

Ermittlung der Anzahl z_1 aller "günstigen Fälle":
Ein "Fall" ist genau dann "günstig", wenn für ihn

$\overline{AP_k} < \overline{P_kP_m} + \overline{P_mB}$, d.h. $k < (m-k)+(2n-m)$, d.h. $k < n$,

und $\overline{P_kP_m} < \overline{AP_k} + \overline{P_mB}$, d.h. $(m-k) < k + (2n-m)$, d.h. $m < k+n$,

und $\overline{P_mB} < \overline{AP_k} + \overline{P_kP_m}$, d.h. $(2n-m) < k + (m-k)$, d.h. $n < m$,

gilt. Hiernach bestehen für k genau die Möglichkeiten 1,...,n-1 und nach der Auswahl einer dieser Möglichkeiten von k für m genau die Möglichkeiten n+1, ... , k+n-1,[*] ihre Anzahl ist k-1.

[*] Im Falle k = 1 bedeute diese Aufzählung (n+1, ... , n), daß keine Möglichkeit besteht.

Alle so erhaltenen "günstigen Fälle" sind untereinander verschieden. Daher ist $z_1 = 0 + \ldots + (n-2) =$

$$= \frac{1}{2}(n-2)(n-1).$$

<u>Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hiernach</u>

$$\frac{z_1}{z} = \frac{n-2}{2(2n-1)} \quad .$$

b) Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $\frac{2}{n}$ gegen 0, also

$$\frac{z_1}{z} = \frac{1 - \frac{2}{n}}{4 - \frac{2}{n}} \quad \text{gegen } \frac{1}{4} \quad .$$