A 11/12 XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11/12

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1221) Es seien u und v zwei ungerade natürliche Zahlen, für die $u > v$ gilt.

a) Man beweise, daß dann $x = u.v$, $y = \frac{u^2-v^2}{2}$ und $z = \frac{u^2+v^2}{2}$ drei natürliche Zahlen sind, für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt, d.h. daß (x,y,z) ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.

b) Geben Sie je eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $x > y$ bzw. $x < y$ gilt!

1222) Es sind alle geordneten Paare (a,b) reeller Zahlen a,b anzugeben, für die das Polynom $f(x) = x^2 + ax + b$ ein Teiler des Polynoms $g(x) = x^4 + ax^2 + b$ ist.

<u>Definition:</u> Ein Polynom f(x) heißt genau dann ein Teiler eines Polynoms g(x), wenn es ein Polynom h(x) gibt, so daß $f(x) \cdot h(x) = g(x)$ gilt.

1223) Man beweise, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

1224) In einer Stadt soll ein Netz von mindestens zwei Autobuslinien eingerichtet werden. Dieses Liniennetz soll folgenden Bedingungen genügen:

(1) Auf jeder Linie gibt es genau drei Haltestellen.

(2) Jede Linie hat mit jeder anderen Linie genau eine Haltestelle gemeinsam.

(3) Es ist möglich, von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle mit einer Linie zu erreichen, ohne zwischendurch auf eine andere Linie umsteigen zu müssen.

Man ermittle alle Möglichkeiten für die Anzahl der Autobuslinien eines solchen Netzes.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1221) **Lösung:** **9 Punkte:** a) 6 Punkte b) 3 Punkte

a) Da u und v ungerade natürliche Zahlen, also $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ gerade Zahlen sind und wegen $u > v$ auch $y > 0$ gilt, sind x, y, z natürliche Zahlen, und es gilt:

$$x^2 + y^2 = u^2v^2 + \frac{u^2-2u^2v^2+v^4}{4} = \frac{u^4+2u^2v^2+v^4}{4}$$

$$= \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2 = z^2 \text{ , w.z.b.w.}$$

b) Es sei $D = x - y$. Dann gilt $D \neq 0$; denn aus $D = 0$ folgte $x = y$, d.h. $2x^2 = z^2$, im Widerspruch zu der Feststellung, daß x und z natürliche Zahlen sind.

Nun gilt $D = u.v - \frac{u^2- v^2}{2} = \frac{v^2+ 2uv + u^2- 2u^2}{2}$.

Aus $D > 0$, d.h. $x > y$, folgt

$u + v > u\sqrt{2}$, also $u < (1 + \sqrt{2})\, v$ und umgekehrt.

Aus $D < 0$, d.h. $x < y$, folgt $u > (1 + \sqrt{2})\, v$ und umgekehrt.

Daher ist im Falle $(v <)\ u < (1 + \sqrt{2})\, v$ die Zahl x, im Falle $u > (1 + \sqrt{2})\, v$ die Zahl y die größere der beiden Zahlen x, y.

1222) <u>Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

Angenommen, es gäbe ein geordnetes Paar (a, b) reeller Zahlen, so daß f (x) ein Teiler von g(x) ist. Dann gibt es ein Polynom h(x), so daß f(x).h(x) = g(x) gilt. Der Grad von f(x).h(x) ist um 2 größer als der Grad von h(x); dieser beträgt daher 2. Das Produkt des höchsten Koeffizienten 1 von f(x) mit dem höchsten Koeffizienten von h(x) ist 1; der letztere ist daher ebenfalls 1 (Das Glied mit x^4 in f(x) hat ebenso wie das Glied mit x^6 in g(x) den Koeffizienten 1. Daher hat auch das Glied mit x^2 in h(x) den Koeffizienten 1.). Somit gibt es zwei reelle Zahlen u und v mit $h(x) = x^2 + ux + v$, und für diese gilt

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)\,(x^2 + ux + v)$$
$$= x^4 + (a + u)x^3 + (v + b + au)x^2 + $$
$$+(av + bu)\,x + bv.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus $a + u = 0$ (A),

$au + b + v = a$ (B), $av + bu = 0$ (C), $bv = b$ (D).

Aus (A) folgt $u = -a$; aus (D) folgt (1.) $b = 0$ oder
(2.) $v = 1$.

(1.) Im Fall $b = 0$ folgt aus (C) $av = 0$, also (1.1) $a = 0$
oder (1.2) $v = 0$.

(1.2) Für $v = 0$ führt (B) auf $-a^2=a$,
also $a = 0$ oder $a = -1$.

(2.) Im Fall $v = 1$ folgt aus (C) $a-ba = 0$,
also (2.1) $a = 0$
oder (2.2) $b = 1$.

(2.1) Für $a = 0$ führt (B) auf $b + 1 = 0$,
also $b = -1$.

(2.2) Für $b = 1$ führt (B) auf $-a^2+2 = a$, also $a = 1$
oder $a = -2$.

Daher können höchstens die geordneten Paare (0;0), (-1;0), (0;-1), (1;1), (-2;1) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich ist x^2 ein Teiler von x^4; x^2-x ein Teiler von x^4-x^2; x^2-1 ein Teiler von x^4-1; $x^2+ x + 1$ ein Teiler von $x^4+ x^2+ 1$; $x^2- 2x + 1$ ein Teiler von $x^4 -2x^2 + 1$.

Anderer Lösungsweg:

Die Division $(x^4 + ax^2 + b) : (x^2 + ax + b)$ ergibt

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + a^2 + a - b)$$
$$+ (a^3 + a^2 - 2ab)\,x + a^2b + ab - b^2 - b.$$

Daher ist $x^2 + ax + b$ genau dann Teiler von $x^4 + ax^2 + b$, wenn

(1) $a\,(a^2 + a - 2b) = 0$ und

(2) $b\,(a^2 + a - b - 1) = 0$ ergibt.

Dieses Gleichungssystem besitzt genau die folgenden geordneten Paare (a;b) reeller Zahlen als Lösung:

(0;0), (0;-1), (-1;0), (1;1), (-2;1); denn

(1) ist äquivalent mit $a = 0$ oder $a^2 + a = 2\,b$ und

(2) ist äquivalent mit $b = 0$ oder $a^2 + a = b + 1$.

1223) Lösung: 7 Punkte

Jede natürliche Zahl m ist von einer der Formen 3g, 3g+1, 3g+2 mit ganzzahligem g. Ihr Quadrat g^2, $9g^2 + 6g + 1$, $9g^2 + 12\,g + 4$ läßt daher bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1. Dagegen läßt für jede natürliche Zahl n die Zahl 6n + 2 bei Division durch 3 den Rest 2 und kann somit für kein natürliches m mit m^2 übereinstimmen, w.z.b.w.

1224) Lösung: 12 Punkte

Angenommen, ein Netz erfülle die genannten Bedingungen. Dann gibt es eine Linie mit genau drei Haltestellen; diese Linie sei L_1, ihre Haltestellen seien B, C, D genannt. Ferner gibt es eine andere Linie; diese hat mit L_1 genau eine Haltestelle gemeinsam, also nicht alle ihre Haltestellen; d.h. es gibt eine von B, C, D verschiedene Haltestelle, A genannt. Laut Aufgabe muß von A je eine Linie nach B, C, D führen; diese drei Linien müssen von L_1 verschieden sein, da diese nicht über A führt. Sie müssen aber auch paarweise voneinander verschieden sein; denn führte eine der Linien von A zu zweien der Punkte B, C, D, so hätte sie diese beiden mit L_1 gemeinsam. Die drei neuen Linien seien in der genannten Reihenfolge L_2, L_3, L_4.

Auf jeder von ihnen liegt genau eine bisher nicht bezeichnete Haltestelle; diese drei neuen Haltestellen sind auch paarweise voneinander verschieden, da sonst wieder mehr als eine gemeinsame Haltestelle zweier der Linien 2, 3, 4 zustandekäme. Die drei neuen Haltestellen seien in der genannten Reihenfolge E, F, G (s. Tabelle, Teil 1).

Gäbe es nun eine von A, B, C, D, E, F, G verschiedene Haltestelle H, so gäbe es laut Aufgabe eine Linie von A nach H. Sie wäre von den Linien 1, 2, 3, 4 verschieden, da diese Linien nicht durch H führen. Sie müßte aber mit L_1 eine Haltestelle gemeinsam haben, also durch einen der Punkte B, C, D gehen, und hätte daher mit einer der Linien 2, 3, 4 mehr als eine gemeinsame Haltestelle. Wegen dieses Widerspruchs sind A, B, C, D, E, F, G die einzigen Haltestellen des Netzes.

Zu jedem der Haltestellenpaare (B, F), (C, G), (D, E) muß es eine Linie geben, die die Haltestellen dieses Paares miteinander verbindet. Diese drei neuen Linien verbinden Haltestellen, die von keiner der bisher bezeichneten Linien miteinander verbunden werden; sie sind daher von den bisher bezeichneten Linien verschieden. Andererseits sind sie auch untereinander verschieden, da je zwei von ihnen schon vier paarweise verschiedene Punkte berühren. Die drei neuen Linien seien in der genannten Reihenfolge L_5, L_6, L_7.

Zu jeder von ihnen gibt es genau eine Möglichkeit, unter den für sie noch nicht aufgezählten Haltestellen eine dritte so zu wählen, daß (2) eingehalten wird, nämlich G für L_5, E für L_6 und F für L_7.

In dem so erhaltenen Netz (s. Tabelle, Teil 1 und 2) ist jede Haltestelle mit jeder anderen durch genau eine Linie verbunden. Gäbe es noch eine weitere Linie, so müßte diese ebenfalls zwei der Haltestellen miteinander verbinden, und es käme zu einem Widerspruch gegen (2). Daher kann nur das hier beschriebene Netz die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Man bestätigt, daß in der Tat diese Bedingungen erfüllt sind.
Die Anzahl der Linien je eines derartigen Netzes beträgt daher 7.

	Linie	Haltestellen
	1	B C D
Teil 1	2	A B E
	3	A C F
	4	A D G
	5	B F G
Teil 2	6	C E G
	7	D E F

Tabelle der Linien