A 10; I   XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1041) a) Zeigen Sie, daß es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist:
Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind.

b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m !

c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

1042) Ein Würfel ABCDEFGH (Abb. A 1042) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A,F,H; B,E,G; C,F,H; D,E,G; E,B,D; F,A,C; G,B,D und H,A,C in Teilkörper zerlegt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!

b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!

30 05 19-1 (588)

A 10; I

Von den nachstehenden Aufgaben 1043A und 1043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

1043A) a) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat.

b) Man beweise, daß jedes konvexe Drachenviereck ABCD mit $\overline{AB} = \overline{AD} = x$, $\overline{CB} = \overline{CD} = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat.

c) Man beweise: Sind M und U die Mittelpunkte und ϱ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt

$$\overline{MU}^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{\varrho^2 + 4r^2} \quad .$$

1043B) Dirk und Jens spielen ein Spiel mit den folgenden Regeln: Es werden genau 7 Hölzchen hingelegt. Abwechselnd machen die Spieler jeweils einen "Zug". Ein "Zug" besteht aus dem Wegnehmen von einem, zwei oder drei Hölzchen. Dabei darf keiner der Spieler den gleichen Zug zweimal hintereinander ausführen. Wer das letzte Hölzchen wegnimmt, hat gewonnen. Das Spiel endet unentschieden, wenn zwar noch Hölzchen vorhanden sind, der am Zug befindliche Spieler aber keinen Zug nach den Spielregeln ausführen kann.
Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler, bei jeder Spielmöglichkeit des anderen, den Gewinn erzwingen?

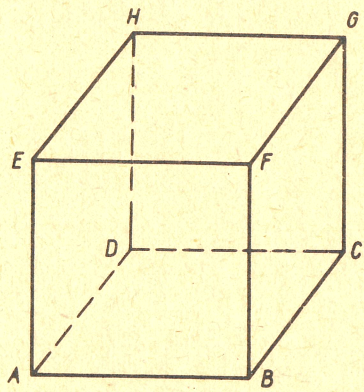

Abb. A 1042

A 10; II XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

1044) In einer Ebene mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (x,y) sei k der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$ und g der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = -1$. Der Definitionsbereich beider Funktionen sei die Menge aller reellen Zahlen x.
Man beweise, daß k die Menge aller derjenigen Punkte der x-y-Ebene ist, die von der Geraden g denselben Abstand haben wie von dem Punkt $F(0;1)$.

1045) Geben Sie alle g-adischen Zahlensysteme an, in denen die folgende Aufgabe wenigstens eine Lösung hat, und ermitteln Sie für diese Zahlensysteme alle Lösungen der Aufgabe:

Welche im g-adischen Zahlensystem zweistellige Zahl hat die Eigenschaft, daß sich erstens durch Vertauschen der beiden Ziffern wieder eine g-adisch-zweistellige Zahl ergibt, und daß man zweitens bei deren Subtraktion von der ~~ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem geschriebene Zahl 12 erhält?~~

ersten Zahl die im gleichen Zahlensystem in der Gestalt 12 (zweistellig) zu schreibende Zahl erhält?

1046) Zwei Karawanen brachen gleichzeitig von einer Oase A auf und marschierten auf demselben Wege über B und C nach D.

Die erste Karawane marschierte jeweils 3 Tage hintereinander und legte dann einen Ruhetag ein, die zweite Karawane dagegen marschierte jeweils 2 Tage hintereinander und legte dann 2 Ruhetage ein. Beide Karawanen brachen an Marschtagen zur gleichen Zeit auf und waren jeweils die gleiche Anzahl von Stunden unterwegs. Sie erreichten die Ziele B,C,D jeweils am Ende dieser Stunden eines Marschtages. Während ihrer Marschtage behielt jede der Karawanen stets dieselbe Geschwindigkeit bei.

Die erste Karawane brauchte für den Weg von A nach C einschließlich der Ruhetage doppelt soviel und für den Weg von A nach D dreimal soviel Tage wie für den Weg von A nach B einschließlich der Ruhetage.

Beide Karawanen trafen am Ende eines Marschtages gleichzeitig in B ein.

Ermitteln Sie, ob die Karawanen auch gleichzeitig in D eintrafen! Wenn nicht, dann stellen Sie fest, welche der beiden Karawanen zuerst in D anlangte!

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

1041) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

(I) Es gibt Vielecke (z. B. Dreiecke) mit genau drei spitzen Innenwinkeln.

(II) Für jedes konvexe n-Eck $A_1A_2...A_n$ gilt:
Durch die Diagonalen $A_{n-1}A_1$, $A_{n-1}A_2, \dots, A_{n-1}A_{n-3}$ wird das n-Eck in die (n-2) Dreiecke $\triangle A_{n-1}A_nA_1$, $\triangle A_{n-1}A_1A_2, \dots, \triangle A_{n-1}A_{n-3}A_{n-2}$ zerlegt. Die Summe seiner Innenwinkelgrößen ist folglich gleich der Summe $(n-2)180^\circ$ der Innenwinkelgrößen dieser Dreiecke.
Sind x der Innenwinkel des n-Ecks spitz, so haben deren Größen eine Summe, die kleiner als $x \cdot 90^\circ$ ist, Die Summe der übrigen n-x Innenwinkelgrößen ist wegen der Konvexität kleiner als $(n-x)180^\circ$. Somit folgt
$(n-2)180^\circ < n \cdot 180^\circ - x \cdot 90^\circ$ und daraus
$$x \cdot 90^\circ < 2 \cdot 180^\circ, \text{ also}$$
$$x < 4.$$
Aus (II) folgt a), daß es eine größte Zahl m der behaupteten Art gibt und daß sie höchstens 3 beträgt.
Hieraus und aus (I) folgt b), daß sie m = 3 ist.
Die Frage c) ist zu bejahen, wie etwa folgendes Beispiel zeigt: (Abb. L 1041)
Auf den Schenkeln eines spitzen Winkels mit dem Scheitel A_2 seien je ein Punkt A_1, A_3 ($\neq A_2$) in gleichem Abstand von A_2 gelegen. Auf dem durch das Innere dieses Winkels gehenden Bogen $\overset{\frown}{A_3A_1}$ des Kreises um den Mittelpunkt A_2 seien Punkte $A_4, \dots, A_n$ gelegen, die in dieser Reihenfolge auf A_3 folgen. Dann ist $A_1A_2...A_n$ ein konvexes n-Eck*), und darin ist $\sphericalangle A_1A_2A_3$ spitz, aber auch $\sphericalangle A_nA_1A_2$ und $\sphericalangle A_2A_3A_4$ als Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken.

*) Beweis: Die Innenwinkel bei A_1, A_2, A_3 sind (s.o.) spitz.

Jeder der Innenwinkel bei $A_4, \ldots, A_n$ ist jeweils die Summe zweier (Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken) spitzer Winkel und daher kleiner als 180°.

1042) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

a) Die Mittelpunkte der Quadrate ABFE, BCGF, CDHG, DAEH, ABCD, EFGH seien in dieser Reihenfolge $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ genannt. Jede der 8 Schnittebenen geht durch genau drei dieser Mittelpunkte, nämlich von denjenigen Quadraten, die an der Würfelecke E bzw. F bzw. G bzw. H bzw. A bzw. B bzw. C bzw. D zusammenstoßen. Diese drei Mittelpunkte bestimmen je genau eine Seitenfläche des Oktaeders mit den Eckpunkten $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$. Umgekehrt liegt jede der 8 Seitenflächen des Oktaeders in genau einer Schnittebene. Daher ist dieses Oktaeder einer der gesuchten Teilkörper.

Verbindet man drei ebengenannte zusammengehörige Mittelpunkte mit der zugehörigen Würfelecke (etwa M_1, M_6, M_4 mit E), so entsteht jeweils ein Tetraeder. Eine seiner Seitenflächen liegt in der erwähnten Schnittebene, die drei anderen liegen in denjenigen drei Schnittebenen, die durch die betrachtete Würfelecke hindurchgehen. Die verbleibenden 4 unter den 8 Schnittebenen verlaufen jeweils außerhalb des betreffenden Tetraeders (jeweils parallel zu einer seiner Seitenflächen; sie bilden ein analog entstandenes Tetraeder an der gegenüberliegenden Würfelecke). Daher sind die Tetraeder $AM_1M_4M_5$, $BM_1M_2M_5$, $CM_2M_3M_5$, $DM_3M_4M_5$, $EM_1M_4M_6$, $FM_1M_2M_6$, $GM_2M_3M_6$, $HM_3M_4M_6$ weitere gesuchte Teilkörper.

Mit den bisher gefundenen 9 Teilkörpern sind alle diejenigen Teilkörper aufgezählt, die nur von Schnittflächen begrenzt werden (Abb. L 1042). Sie entstehen bei gegenseitiger Durchdringung der Tetraeder ACFH und BDEG. Der sternförmige Körper, der sich aus ihnen zusammensetzt, wird zum Würfel ergänzt, indem man für jede Seitenkante des Würfels genau ein weiteres Tetraeder hinzufügt, nämlich dasjenige Tetraeder, das die Endpunkte dieser

Seitenkante und die Mittelpunkte der an die Seitenkante angrenzenden Quadrate als Eckpunkte hat. Mit den 12 Tetraedern ABM_1M_5, ADM_4M_5, AEM_1M_4, BCM_2M_5, CDM_3M_5, CGM_2M_3, DHM_3M_4, EFM_1M_6, EHM_4M_6, FGM_2M_6, GHM_3M_6 sind folglich die restlichen aller gesuchten Teilkörper gefunden. Es gibt daher insgesamt 21 Teilkörper.

b) Die zuletzt genannten 12 Tetraeder sind sämtlich untereinander kongruent. Jedes dieser Tetraeder läßt sich als dreiseitige Pyramide auffassen, deren Grundfläche einen Inhalt von einem Viertel des Flächeninhalts einer Würfelseitenfläche hat. Die jeweils zugehörige Höhe hat dann die Länge $\frac{a}{2}$. Mithin beträgt das Volumen jedes dieser 12 Tetraeder $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{24}a^3$.
Das Oktaeder kann aus zwei kongruenten Pyramiden mit der Grundfläche $M_1M_2M_3M_4$ zusammengesetzt werden. Diese hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$; die Summe der Höhen ist gleich der Strecke M_5M_6, deren Länge a beträgt. Somit hat das Oktaeder das Volumen $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a = \frac{1}{6}a^3$.
Die übrigen 8 Tetraeder sind untereinander kongruent. Daher hat jedes von ihnen das Volumen
$\frac{1}{8}\cdot(1 - \frac{12}{24} - \frac{1}{6})a^3 = \frac{1}{24}a^3$.

1043A) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

a) Ist ABCD ein konvexes Drachenviereck mit $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$, so ist AC Halbierende der Innenwinkel bei A und C; ferner schneiden sich die Halbierenden der Innenwinkel bei B und D auf der Symmetrieachse AC. Daher gehen die Halbierenden aller vier Innenwinkel durch einen und denselben Punkt M auf AC. Infolgedessen hat M von den Seiten AB, BC, CD, DA gleichen Abstand, ist also der Mittelpunkt des Inkreises von ABCD.

b) Der Kreis über AC als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes des Thales durch B und D, ist folglich Umkreis. Sein Mittelpunkt U ist auch Mittelpunkt der Strecke AC.

c) Die Lote von M auf AB bzw. BC mögen die Fußpunkte P bzw. Q haben. Dann ist MPBQ ein Rechteck, und wegen $\overline{MP} = \overline{MQ} = \varrho$ sogar ein Quadrat. Nun gilt

$r = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, sowie nach dem Strahlensatz

$\frac{x-\varrho}{x} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{CB}} = \frac{\varrho}{y}$, also $\varrho = \frac{xy}{x+y}$.

Ferner gilt $\frac{\overline{AM}}{2r} = \frac{\varrho}{y}$, also $\overline{AM} = \frac{2rx}{x+y}$.

Wegen $\overline{MU} = \left|\overline{AM} - r\right|$ erhält man nun

$$\overline{MU}^2 = \left|\overline{AM} - r\right|^2 = \left(\frac{r}{x+y}(2x - (x+y))\right)^2 = r^2\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

$$= r^2\,\frac{((x+y)^2 - 4xy)}{(x+y)^2}$$

$$= r^2 - \frac{4r^2xy}{(x+y)^2}$$

$$= r^2 - \frac{xy(x^2 + y^2)}{(x+y)(x+y)}$$

$$= r^2 - \varrho\frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

$$= r^2 - \varrho\left[(x+y) - \frac{2xy}{x+y}\right]$$

$= r^2 + \varrho^2 - \varrho(-\varrho + (x+y))$, und wegen $x + y - \varrho > 0$,

$$\overline{MU}^2 = r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho(x+y) + (x+y)^2}$$

$$= r^2 + \varrho^2 - \varrho\sqrt{\varrho^2 + 4r^2}$$ w.z.b.w.

1043B) Lösung: 7 Punkte

Wenn der Anziehende A im ersten Zug 1 Hölzchen nimmt, so kann der andere Spieler den Gewinn erzwingen, nämlich indem er ebenfalls 1 Hölzchen nimmt, so daß beim zweiten Zug von A 5 Hölzchen vorhanden sind. Von ihnen muß er laut Spielregel 2 oder 3 Hölzchen nehmen, und dann bleiben 3 bzw. 2 Hölzchen übrig, die der zweite Spieler nunmehr nehmen kann.

Wenn A im ersten Zug 2 Hölzchen nimmt, so kann der zweite Spieler ebenfalls den Gewinn erzwingen, nämlich indem er 3 Hölzchen nimmt, so daß genau 2 Hölzchen übrigbleiben. Von ihnen darf der erste Spieler laut Spielregel nur 1 Hölzchen nehmen, und das restliche Hölzchen kann dann wieder der zweite Spieler nehmen.

Nimmt aber der erste Spieler im ersten Zug 3 Hölzchen, so kann er den Gewinn erzwingen, falls der Nachziehende nun 2 oder 3 Hölzchen nimmt; denn dann bleiben 2 bzw. 1 Hölzchen übrig, die A vollständig fortnehmen kann. Falls jedoch der zweite Spieler nun 1 Hölzchen nimmt, so verbleiben 3 Hölzchen. Von ihnen kann der erste Spieler in seinem zweiten Zug laut Spielregeln nur 1 oder 2 Hölzchen nehmen. Nimmt er 1 Hölzchen, so verliert er. Nimmt er dagegen 2 Hölzchen, so kann der zweite Spieler das verbleibende Hölzchen nach den Spielregeln nicht nehmen; das Spiel endet also unentschieden.

Damit ist gezeigt, daß es keinen Spieler gibt, der bei jeder Spielmöglichkeit des anderen den Gewinn erzwingen kann.

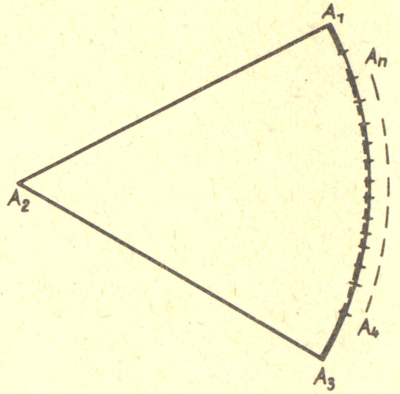

Abb. L 1041

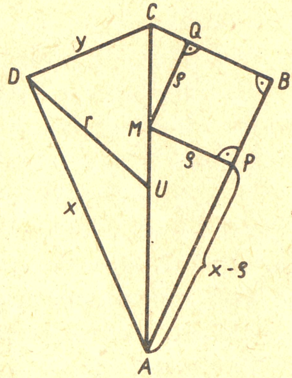

Abb. L 1043A

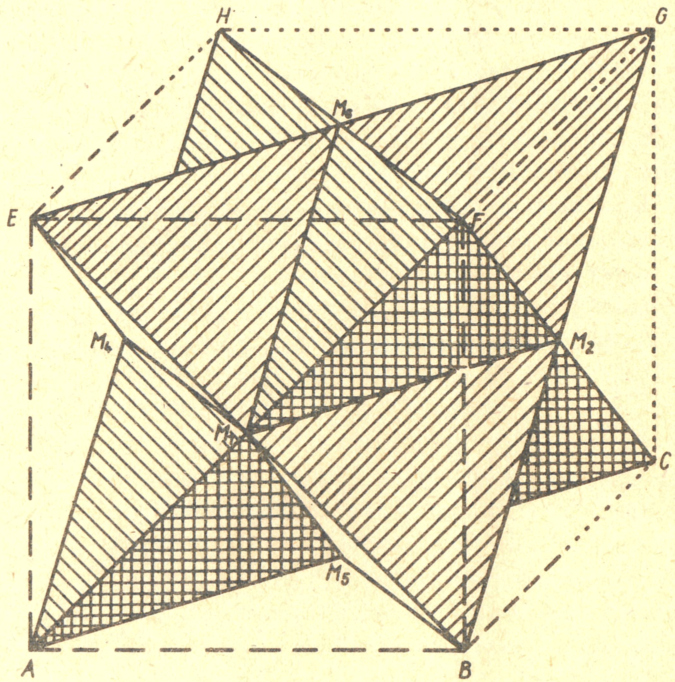

Abb. L 1042

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

1044) Lösung: 6 Punkte

Der Abstand eines Punktes $P(x,y)$ von der Geraden g ist gleich dem Abstand zwischen P und dem auf g liegenden Punkt mit gleicher Abszisse wie P, d.h. dem Punkt $Q(x,-1)$, da g parallel zur Abszissenachse verläuft. Dieser Abstand beträgt $\sqrt{(y+1)^2} = |y+1|$.

(Bemerkung: Dieses Ergebnis kann auch geometrisch durch Fallunterscheidung $y \gtrless -1$ hergeleitet werden.)

Der Abstand zwischen P und F beträgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Nun gilt:

(I) Hat ein Punkt $P(x,y)$ von g denselben Abstand wie von F, so folgt $|y+1| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, also
$(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$, bzw.
$y = \frac{1}{4} x^2$, also liegt P auf k.

(II) Die in (I) genannten Schlüsse lassen sich umkehren (oder auch sogleich als Äquivalenz formulieren). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hinweis zur Korrektur: Bei der Schlußrichtung (II) kann man $P \in k$, also $y = \frac{1}{4} x^2 \geq 0 > -1$ heranziehen, so daß aus $(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2$ auf $y+1 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ geschlossen und auch der Abstand zwischen P und g als $y+1$ geschrieben werden kann. Für eine vollständige Lösung der Aufgabe ist aber außerdem die Schlußrichtung (I) erforderlich. Bei dieser darf nur die Gleichheit der Abstände von P zu g und F, aber keine weitere Einschränkung vorausgesetzt werden. Also hat man in (I) auch den Fall $y < -1$ zu diskutieren und somit den Abstand $|y+1|$ zwischen P und g.

1045) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Angenommen, in einem g-adischen System gebe es eine Lösung der genannten Aufgabe. Ihre Ziffern seien in dieser Reihenfolge mit a,b bezeichnet. Dann gilt

(1) $0 < a,b < g$,

(2) $ag + b - bg - a = g + 2$.

Hiernach ist $(a-b)(g-1) = g+2 > 0$, also wegen $g-1 > 0$

(3) $a > b$.

Aus (2) und (3) erhält man $(a-b-1)g = a-b+2 > 0$, also

(4) $a-b-1 > 0$.

Aus (1) folgt ferner $a \leqq g-1$ und $b \geqq 1$, also $a-b \leqq g-2$, mithin

(5) $a-b-1 = \frac{a-b+2}{g} \leqq 1$.

Wegen (4) und (5) muß $a-b-1 = 1$, d.h.

(6) $a-b = 2$ und damit

(7) $g = 4$ gelten.

Zusammen mit $0<a,b<4$ sind (3) und (6) nur durch $a = 3$, $b = 1$ erfüllbar. Somit kann es nur im 4-adischen System Lösungen der angegebenen Aufgabe geben, und dort nur die Lösungen $3\cdot4+1$.

Tatsächlich ist das die Lösung, da erstens auch $1\cdot4+3$ eine 4-adisch-zweistellige Zahl ist und diese zweitens von $3\cdot4+1$ subtrahiert $1\cdot4+2$ ergibt, wie es verlangt war.

1046) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Laut Aufgabe sind für die erste Karawane genau die Tage Marschtage, die sich mit ganzzahligen $n \geqq 0$ in der Form $(4n+1)$, $(4n+2)$, $(4n+3)$ schreiben lassen. Für die zweite Karawane sind das die Tage $(4n+1)$, $(4n+2)$. Also sind gemeinsame Marschtage genau die Tage $(4n+1)$, $(4n+2)$. Innerhalb von 4n Tagen hat die erste Karawane genau 3n Marschtage, die zweite genau 2n Marschtage.

Da beide Karawanen gleichzeitig in B eintreffen, kann das nur an einem der Tage $(4n+1)$, $(4n+2)$ geschehen sein. Wäre es an einem Tage $(4n+2)$ gewesen, so hätte die erste Karawane C laut Aufgabenstellung am Ende des $(8n+4)$ten Tages erreicht, im Widerspruch dazu, daß dieser Tag kein Marschtag für sie war.

Also haben beide Karawanen B am Ende eines $(4n+1)$ten Tages erreicht. Von diesen $(4n+1)$ Tagen waren $(3n+1)$ Marschtage der ersten und $(2n+1)$ Marschtage der zweiten Karawane.

Die erste Karawane erreichte D am Ende des $(12n+3)$ten Tages. Von diesen $(12n+3)$ Tagen marschierte sie $(9n+3)$ Tage. Hiernach und wegen $9n+3 = 3\cdot(3n+1)$ ist der Weg von A nach D genau dreimal so weit wie der von A nach B.

In den gleichen $(12n+3)$ Tagen marschierte die zweite Karawane $(6n+2)$ Tage. Wegen $6n+2 < 3\cdot(2n+1)$ bewältigte sie in diesen Tagen weniger als den Weg von A nach D.

Also traf die erste Karawane zuerst in D ein.