XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

1021) Lösung: 6 Punkte

Da z_1 und z_2 aus den gleichen Ziffern bestehen, haben sie auch die gleiche Quersumme q. Daher lassen beide Zahlen bei Division durch 9 den gleichen Rest r ($0 \leqq r < 9$).
Mithin gilt:
$z_1 = 9n + r$ sowie $z_2 = 9m + r$ (n, m natürliche Zahlen).
Daraus folgt $|z_1 - z_2| = 9|n - m|$, d.h. $|z_1 - z_2|$ ist durch 9 teilbar.

1022) Lösung: 10 Punkte: a) 5 Punkte b) 5 Punkte

a)

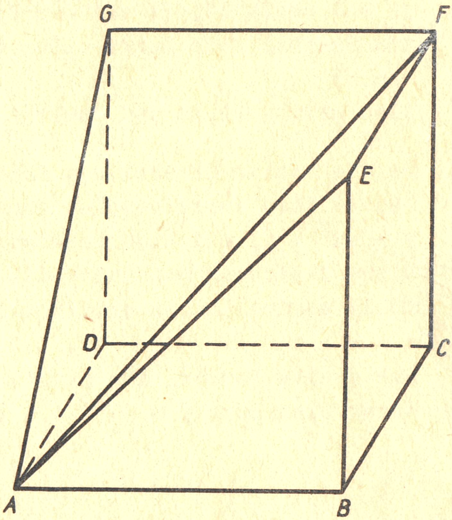

Abb. L 1022

b) Den Körper kann man sich entstanden denken, indem man aus einem Würfel mit der Kantenlänge a einen Tetraederkörper mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und der zugehörigen Höhe der Länge a herausschneidet. Daher gilt für das Volumen V dieses Körpers
$V = a^3 - \frac{1}{3} a^2 \cdot a = \frac{2}{3} a^3$.

1023) **Lösung:** **12 Punkte:** (I) 6 Punkte (II) 3 Punkte (III) 3 Punkte

(I) Da A und B auf der ersten Parabel liegen, müssen ihre Koordinaten die Gleichung $y = x^2$ erfüllen. Da beide Parabeln symmetrisch zur y-Achse liegen, müssen A und B symmetrisch zu dieser Achse liegen; B sei der im ersten Quadrant gelegene unter diesen beiden Punkten. Weiter müssen auch A_1 und B_1 symmetrisch zur y-Achse liegen, d.h. der Ursprung des Koordinatensystems ist der Mittelpunkt der Strecke A_1B_1. Da ferner nach Voraussetzung $\overline{A_1B_1} = \overline{BB_1}$ ist, gilt für die Koordinaten $x_1;y_1$ des Punktes B folgende Beziehung:
$y_1 = 2x_1$.
Aus dem Gleichungssystem (1) $y_1 = x_1^{\ 2}$ (2) $y_1 = 2x_1$ erhält man $x_1 = 2$ und $y_1 = 4$.
(Die zweite Lösung des Gleichungssystems, $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ entfällt, da auf der Symmetrieachse der zweiten Parabel kein Punkt außer dem Scheitelpunkt liegen kann.)
Also gilt B (2;4) und damit A (-2;4).

(II) Da die zweite Parabel den Scheitelpunkt S (0;6) hat, lautet ihre Funktionsgleichung
$y = ax^2 + 6$, mit einer geeigneten reellen Zahl a.
Diese Gleichung muß durch die Koordinaten von B erfüllt werden. Daher erhält man $4 = 4a + 6$ und daraus $a = -\frac{1}{2}$.
Die zweite Parabel ist mithin der Graph der Funktion, deren Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ lautet.

(III) Ihre Nullstellen erhält man daher aus der Gleichung
$-\frac{1}{2}x^2 + 6 = 0.$
Sie lauten $x_{01} = \sqrt{12}$ und $x_{02} = -\sqrt{12}$.
Die gesuchten Schnittpunkte der zweiten Parabel mit der x-Achse haben demnach die Koordinaten
$(\sqrt{12}\,;\,0)$ und $(-\sqrt{12}\,;\,0)$.

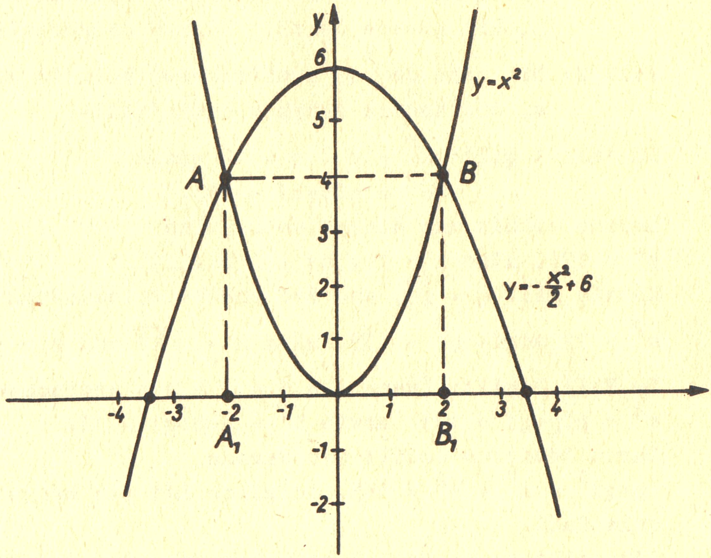

Abb. L 1023
(wird vom Schüler nicht verlangt)

1024) <u>Lösung:</u> <u>12 Punkte:</u> a) 6 Punkte b) 6 Punkte

a) Angenommen, es gäbe ein derartiges rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ und es seien die Maßzahlen der Längen
der p zugeordneten Kathete mit a
der q zugeordneten Kathete mit b und
der Höhe mit h bezeichnet.

Nun unterscheiden wir folgende beiden Fälle:

Fall 1: Die eine der zu ermittelnden Wurzeln wird durch h, die andere durch a oder b dargestellt.

Fall 2: Die eine der zu ermittelnden Wurzeln wird durch a, die andere durch b dargestellt.

Im Fall 1 gilt: $h^2 = p \cdot q = 12$ sowie
$a^2 = p(p+q) = 133$.
Daraus erhält man durch Subtraktion
$p^2 = 121$, also $p = 11$, da $p > 0$ gilt.
Mithin gilt $q = \frac{12}{11}$, und man erhält tatsächlich
$h^2 = 12$ sowie $a^2 = 133$, also $h = \sqrt{12}$ und $a = \sqrt{133}$.

Im Fall 2 gilt: (wenn o.B.d.A. $a > b$ angenommen wird)
$a^2 = p(p+q) = 133$ sowie $b^2 = q(p+q) = 12$.
Durch Addition erhält man daraus
$(p+q)^2 = a^2 + b^2 = 145$, folglich ist p+q keine rationale Zahl.
Also gibt es im Fall 2 kein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

b) Hier gilt im Fall 1: $h^2 = p.q = 11$ sowie
$a^2 = p(p+q) = 133$.

Daraus erhält man durch Subtraktion $p^2 = 122$, folglich ist p nicht rational.

Also gibt es im Fall 1 kein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Im Fall 2 gilt: (1) $a^2 = p(p+q) = 133$ sowie
$b^2 = q(p+q) = 11$.

Daraus erhält man durch Addition $(p+q)^2 = 144$, also wegen $p,q > 0$ $p+q = 12$ bzw. $q = 12 - p$.

Durch Einsetzen in (1) ergibt sich $12p = 133$, also $p = \frac{133}{12}$ und mithin $q = \frac{11}{12}$.

Tatsächlich erhält man in diesem Falle $a^2 = 133$, also $a = \sqrt{133}$, sowie $b^2 = 11$, also $b = \sqrt{11}$, wie es verlangt war.