XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

931) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist!

932) Karlheinz will aus gleichgroßen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, daß sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abb. A 932 gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.
Geben Sie (durch Angabe der Anzahlen der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

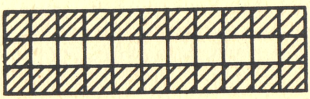

Abb. A 932

A 9;I

933) Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A,B,C,D,E,F,G,H (Abb. A 933) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A,B,G,H; D,C,F,E; A,D,G,F; B,C,H,E; A,E,G,C und B,H,F,D gehen.

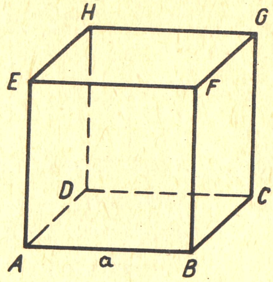

Abb. A 933

Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfel dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.

A 9;II

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

934) Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:
A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, den Rest mit 5 km/h.
B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, während der übrigen Zeit mit 5 km/h.
Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

935) Es sei ABCD ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}$.
Beweisen Sie, daß dann $AC \perp BD$ gilt!

936) a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k,n,m) natürlicher Zahlen k,n,m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3808$ gilt.
b) Man gebe alle Tripel an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

931) Lösung: 5 Punkte

Es gilt $n^6 - n^2 = n^2 \cdot (n^4 - 1) = n^2 \cdot (n^2 + 1) \cdot (n^2 - 1)$.
Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen n^2-1, n^2, n^2+1 ist mindestens eine gerade.
Ist n durch 5 teilbar, so ist n^2 durch 5 teilbar. Ist n nicht durch 5 teilbar, so läßt n bei Division durch 5 einen der Rest 1,2,3,4. Dann läßt n^2 bei Division durch 5 bzw. den Rest 1,4,4,1.
Läßt n^2 bei Division durch 5 den Rest 1, so ist n^2-1 durch 5 teilbar.
Läßt n^2 bei Division durch 5 den Rest 4, so ist n^2+1 durch 5 teilbar.
In jedem Falle ist daher $n^6-n^2 = (n^2-1)\cdot n^2\cdot(n^2+1)$ durch 2 und durch 5 und folglich, da 2 und 5 teilerfremd sind, auch durch 10 teilbar.

(Bemerkung: n^6-n^2 ist für jedes ganze n sogar durch 60 teilbar.)

932) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, eine Rechteckfläche, in der jede Zeile aus a und jede Spalte aus b Quadratflächen besteht, erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist $a \geq 3$ und $b \geq 3$, da sonst keine weißen Quadratflächen aufträten, und die Anzahl der roten Quadratflächen beträgt $2a+2b-4$, die Anzahl der weißen Quadratflächen beträgt $(a-2)\cdot(b-2) = ab-2a-2b+4$. Somit gilt $2a+2b-4 = ab-2a-2b+4$, also (1) $a(b-4) = 4b-8$.
Wäre $b = 3$, so folgte $-a = 4$; wäre $b = 4$, so folgte $0 = 8$, was beides einen Widerspruch darstellt. Also gilt $b > 4$,

d.h. (2) $b-4 > 0$. Wegen (1) ist $4b-8 = 4(b-4) + 8$ durch $b-4$ teilbar und daher auch (3) 8 durch $b-4$ teilbar. Nach (2), (3) kann $b-4$ nur eine der Zahlen 1,2,4,8 sein. Hieraus und aus (1) ergeben sich für das Paar (a,b) nur die Möglichkeiten

a	b
12	5
8	6
6	8
5	12

Wie die Abb. L 932 zeigt, erfüllen in der Tat diese Paare die Bedingungen der Aufgabe (Fall 1 und 4 bzw. Fall 2 und 3 gehen durch Vertauschung der Zeilen mit den Spalten auseinander hervor).

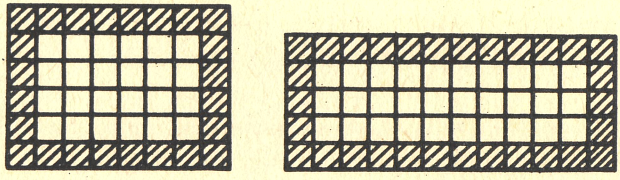

Abb. L 932

Der vorstehende Lösungsweg untersucht, wann sich aus (1) eine natürliche Zahl a ergibt. Einfacher wird die Darstellung bei folgendem <u>2. Lösungsweg:</u>

Die (durch positive ganze a,b zu erfüllende) Bedingung ist äquivalent mit $ab-4a-4b+8 = 0$ und dies mit (*) $(a-4)(b-4) = 8$.

Also hat man alle ganzzahligen Faktorenzerlegungen (*) von 8 zu prüfen, ob für sie a und b positiv (ganzzahlig) sind. Ist nun eine der Zahlen $(a-4)$, $(b-4)$ ein Faktor (-8) oder (-4), so hat die betreffende Zahl a bzw. b den Wert (-4) oder (0).

Daher lösen genau die Zerlegungen $8 = 8.1 = 4.2 = 2.4 = 1.8$ und somit genau die oben angegebenen Paare (a,b) die Aufgabe.

933) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

Die vier Raumdiagonalen eines Würfels schneiden sich in einem Punkt. Er sei mit M bezeichnet. Mit M als Spitze und je einer Würfelfläche als Grundfläche gibt es genau 6 vierseitige Pyramiden, die den Würfelkörper vollständig ausfüllen. Diese Pyramiden sind untereinander kongruent.

Jede der vier Seitenflächen jeder Pyramide ist in genau einer der 6 in der Aufgabe genannten Schnittebenen enthalten, d.h. daß jede Pyramide nur noch von zwei der gegebenen Ebenen geschnitten werden kann. Dies wird sie in der Tat, nämlich von denjenigen beiden Schnittebenen, die auf der Grundfläche der Pyramide senkrecht stehen und deren (Flächen-)Diagonalen enthalten. Sie zerlegen die Pyramide in vier untereinander volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper. Der Würfel wird daher in 24 Teilkörper zerlegt.

Alle Teilkörper sind untereinander volumengleich Das Volumen jedes dieser Teilkörper beträgt daher $\frac{a^3}{24}$.

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

934) Lösung: 5 Punkte

Mit den üblichen Bezeichnungen s für die Weglänge, v für die Geschwindigkeit und t für die aufgewandte Zeit gilt $s = v \cdot t$ bzw. $t = \frac{s}{v}$. Wird nun die von A aufgewandte Zeit mit t_A und die von B aufgewandte Zeit mit t_B bezeichnet, dann gilt

einerseits für A: $t_A = t_1 + t_2$ mit $t_1 = \frac{s}{2 \cdot 4} = \frac{s}{8}$ und $\frac{t}{2} =$

$$= \frac{s}{2 \cdot 5} = \frac{s}{10}, \text{ also } t_A = \frac{9}{40}\,s, \text{ und}$$

andererseits für B: $s_B = s_1 + s_2$ mit $s_1 = \frac{t_B}{2} \cdot 4$ und $s_2 =$

$$= \frac{t_B}{2} \cdot 5, \text{ also } s = \frac{t_B}{2} \cdot 9 \text{ bzw. } t_B = \frac{2}{9}\,s.$$

Wegen $9 \cdot 9 > 2 \cdot 40$ gilt nun $t_A > t_B$, d.h. B war eher am Ziel als A.

2. Lösungsweg:

Man kann sich die Gesamtstrecke in 9 gleichlange Teilstrekken geteilt denken. Dann ging A genau $4\frac{1}{2}$ dieser Teilstrekken mit 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B dagegen ging genau 4 dieser Teilstrecken mit 4 km/h, die restlichen 5 Teilstrecken mit 5 km/h; denn bei dieser Aufteilung sind die aufgewandten Zeiten für die beiden Geschwindigkeiten gleichlang (und, da sie bei jeder anderen Aufteilung anders ausfallen, auch nur bei dieser). Daher kam B zuerst am Ziel an.

Oder noch einfacher (ohne Rechnung):

Wäre die Teilstrecke s, die B mit 5 km/h durchläuft, eine Hälfte der Gesamtstrecke oder weniger, so benötigte B für s weniger Zeit als für die andere, langsamer durchlaufene und und mindestens ebenso lange Teilstrecke. Dies widerspricht der Aufgabenstellung. Also war die mit 5 km/h durchlaufene Teilstrecke für B länger als die für A. Folglich kam B zuerst am Ziel an.

935) <u>Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

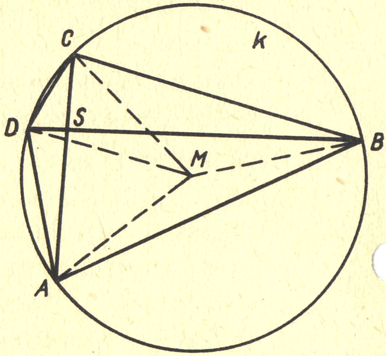

Abb. L 935

Der Mittelpunkt von k sei M, der Schnittpunkt der Diagonalen sei S. Nach Voraussetzung gilt: $\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle CMD} = \overline{\sphericalangle BMC} + \overline{\sphericalangle DMA}$, also, da die Summe beider Seiten dieser Gleichung 360° beträgt,
$\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle CMD} = 180^\circ$.

Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel gilt daher:
$\overline{\sphericalangle SCB} + \overline{\sphericalangle CBS} = \overline{\sphericalangle ACB} + \overline{\sphericalangle CBD} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMB} + \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle CMD} = 90^\circ$.

Mithin gilt nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck $\triangle BSC$: $\overline{\sphericalangle BSC} = 180^\circ - (\overline{\sphericalangle SCB} + \overline{\sphericalangle CBS}) = 90^\circ$, also $AC \perp BD$, w.z.b.w.

936) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte:</u> a) 5 Punkte b) 2 Punkte

a) Wegen $3808 = 2^5 \cdot 7 \cdot 17$ sind alle Quadratzahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 4 und 16. Ferner sind alle ungeraden natürlichen Zahlen, die Teiler von 3808 sind, 1, 7, 17 und $7 \cdot 17 = 119$. Daraus folgt:
Eine natürliche Zahl n kommt genau dann als zweite Zahl in einem der zu betrachtenden Tripel (k,n,m) vor, wenn sie eine der Zahlen (1) 1, 2, 4 ist.
Eine natürliche Zahl m kommt genau dann als dritte Zahl in einem Tripel (k,n,m) vor, wenn 2m+1 eine der Zahlen 1, 7, 17, 119 ist, d.h. genau dann, wenn m eine der Zahlen (2) 0, 3, 8, 59 ist.
Für jedes Paar (n,m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt es genau eine natürliche Zahl k, so daß (k,n,m) eines der

zu betrachtenden Tripel ist, nämlich (3) $k = \frac{3808}{n^2(2m+1)}$.

Da es genau 12 verschiedene Paare (n,m) mit n aus (1) und m aus (2) gibt und die hiermit entstehenden Tripel (k,n,m) erst recht verschieden sind, beträgt deren Anzahl somit ebenfalls 12.

b) Es gilt stets $knm \geqq 0$. Der Wert $knm = 0$ wird nach (1), (2), (3) genau dann angenommen, wenn $m = 0$ ist. Er ist somit für alle betrachteten Tripel der kleinste Wert und wird genau für die Tripel mit $m = 0$, n aus (1) und k aus (3), d.h. genau für (3808, 1, 0); (952, 2, 0); (238, 4, 0) angenommen.