A 9

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 9

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

921) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

922) Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient

$\frac{8 - 3x}{7x - 2}$ negativ ist!

923) Zu Dekorationszwecken sollen gleichgroße Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.

(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.

(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.

(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.

(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.

(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

924) Ein konvexes Tangentenviereck ABCD (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, daß er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.

Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

921) Lösung: 6 Punkte

Ist n die mittlere der drei natürlichen Zahlen, so lauten sie $(n-1)$, n, $(n+1)$. Die Summe ihrer Kuben ist die Zahl

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1$$
$$=3n^3+6n=3(n^3+2n),$$ und diese Zahl ist durch 3 teilbar, w.z.b.w.

922) Lösung: 10 Punkte

Der genannte Quotient ist genau dann negativ, wenn entweder

$8 - 3x > 0$ und $7x - 2 < 0$ (Fall 1) oder

$8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$ (Fall 2) ist.

Trifft Fall 1 für ein x zu, so folgt aus

$8 - 3x > 0$ sowie aus $7x - 2 < 0$

$3x < 8$, also $7x < 2$, also

$x < \frac{8}{3}$ $x < \frac{2}{7}$.

Wegen $\frac{2}{7} < \frac{8}{3}$ folgt also $x < \frac{2}{7}$.

Trifft Fall 2 für ein x zu, so folgt entsprechend aus

$8 - 3x < 0$ sowie aus $7x - 2 > 0$

$3x > 8$, also $7x > 2$, also

$x > \frac{8}{3}$ $x > \frac{2}{7}$.

Wegen $\frac{8}{3} > \frac{2}{7}$ folgt also $x > \frac{8}{3}$.

Tatsächlich ist für $x < \frac{2}{7}$ erst recht $x < \frac{8}{3}$ und daher $7x - 2 < 0$ und $8 - 3x > 0$, so daß Fall 1 zutrifft.
Tatsächlich ist für $x > \frac{8}{3}$ erst recht $x > \frac{2}{7}$ und daher $8 - 3x < 0$ und $7x - 2 > 0$, so daß Fall 2 zutrifft.
Mithin ist der genannte Quotient genau für diejenigen reellen Zahlen x negativ, für die $x < \frac{2}{7}$ oder $x > \frac{8}{3}$ gilt.

L 9

923) **Lösung:** **12 Punkte**

Es sei n die Anzahl der Reihen. Dann ist die Anzahl s aller verwendeten Büchsen wegen (1) und (2) gleich der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, also gilt:

$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$.

Wegen (3) und (4) muß diese Summe durch 3 teilbar sein.

Weiter gilt wegen (3), (5) und (6) $n \geq 3$.

Für $n = 3$ ist $s = 6$. Da es in diesem Fall genau 3 Reihen gibt, ist wegen (5), (6) und (3) die Bedingung (4) nicht erfüllbar.

Für $n = 4$ ist $s = 10$, also nicht durch 3 teilbar.

Für $n = 5$ ist $s = 15$. Wegen (4) müßten also von jeder Sorte genau 5 Büchsen verwendet werden. Da wegen (1) und (2) in diesem Falle die unterste Reihe 5 Büchsen enthält, müßten die übrigen beiden Sorten so auf die restlichen 4 Reihen verteilt werden, daß jeweils 5 Büchsen der beiden Sorten verwandt werden. Andererseits müßten wegen (6) die Sorten von Reihe zu Reihe wechseln. Nun enthalten die Reihen aber der Reihe nach die Anzahlen 4, 3, 2, 1, und es ist $4 + 2 \neq 3 + 1$. Daher lassen sich auch für $n = 5$ die Bedingungen (1) bis (6) nicht gleichzeitig erfüllen.

Für $n = 6$ ist $s = 21$. Wegen (4) müßten mithin von jeder Sorte genau 7 Büchsen verwendet werden. Da wegen (1) und (2) in diesem Falle die unterste Reihe 6 Büchsen enthält, müßte die siebente Büchse der für die unterste Reihe verwendeten Sorte in der obersten Reihe stehen. Die restlichen Reihen mit 2, 3, 4 bzw. 5 Büchsen wären dann mit den restlichen beiden Büchsensorten zu besetzen, und zwar wegen (6) abwechselnd. Wegen $2 + 4 \neq 3 + 5$ ist dann aber (4) nicht erfüllt.

Für $n = 7$ ist $s = 28$, also nicht durch 3 teilbar.

Für $n = 8$ ist $s = 36$. Stellt man die erste Sorte Büchsen in die Reihen mit 1, 3 bzw. 8 Büchsen, die zweite Sorte in die Reihen mit 2, 4 bzw. 6 Büchsen und die dritte Sorte in die Reihen mit 5 bzw. 7 Büchsen, dann wurden wegen

$1 + 3 + 8 = 2 + 4 + 6 = 5 + 7 = 12$ von jeder Sorte gleich viel verwendet und auch die Bedingungen (1), (2), (3), (5) und (6) wurden eingehalten. Daher ist $n = 8$ die kleinste

Anzahl von Reihen, mit der (1) bis (6) erfüllbar sind, und somit s = 36 die gesuchte kleinste Anzahl von Büchsen.
Die (vom Schüler nicht verlangte) Abb. L 923 veranschaulicht die Lösung.

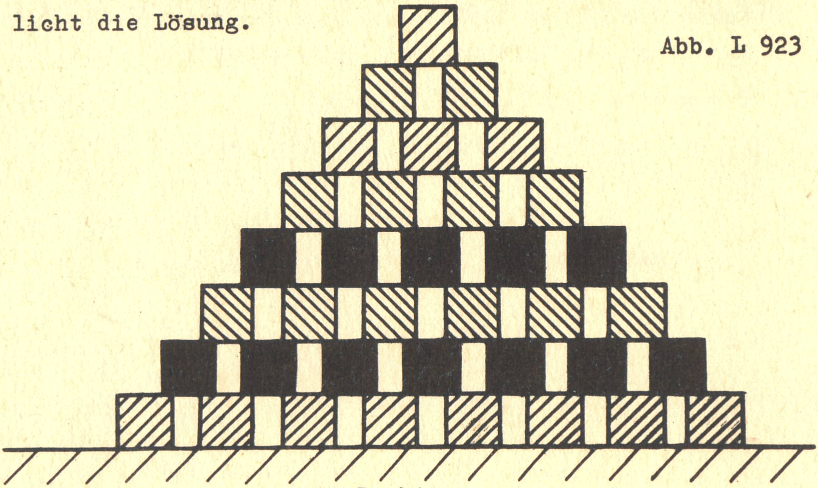

Abb. L 923

924) Lösung: 12 Punkte

Der Mittelpunkt des Inkreises sei M, die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Seiten AB, BC, CD, DA seien der Reihe nach G, H, K, L. Nun gilt:
$\overline{MG} = \overline{MH} = \overline{MK} = \overline{ML} = r$ und $MG \perp AB$, $MH \perp BC$, $MK \perp CD$, $ML \perp DA$.

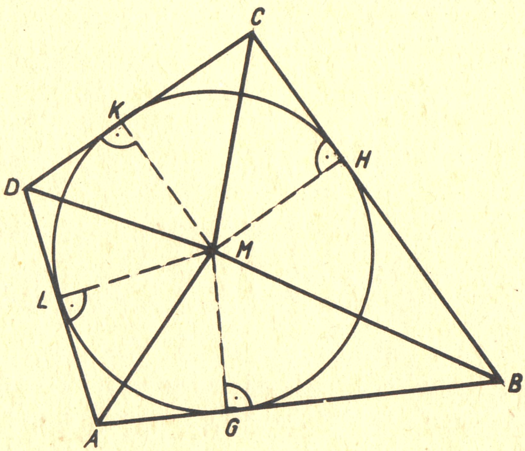

Abb. L 924

L 9

Der gesuchte Flächeninhalt F ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke
$\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$, $\triangle DAM$.
Da diese Dreiecke sämtlich die Höhenlänge r haben und die Summe der Längen der zugehörigen Grundseiten AB, BC, CD, DA gleich dem Umfang u ist, gilt mithin:

$F = \frac{1}{2} u \cdot r$.