XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

**Achtung:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

831) Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tip darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.
Als man die Tipscheine auswertete, stellte es sich heraus, daß ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolgen Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tips genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getipt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tipschein erreichbar.
Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17.
Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettbewerb, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.
Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tip Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

832) Beweise den folgenden Satz:
Sind a, b, c ($a \geqq b \geqq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zweien dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

833) Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite AB sei ein Parallelogramm ABDE so errichtet, daß dessen Seite DE mit C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, daß dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und daß außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten BC und AC je ein Parallelogramm CBIH bzw. ACKL derart errichtet, daß D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.
Beweise, daß dann der Flächeninhalt des Parallelogramms ABDE gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme BIHC und CKLA ist!

# XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## 3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

**Achtung:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

834) Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei AB. Zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes $P_1$ viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes $P_2$.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von $P_1$ (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMP_2$!

835) Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9$ cm und einem Zentriwinkel $\sphericalangle PMR$ der Größe $50^\circ$.
Konstruiere ein Quadrat ABCD so, daß A auf MP liegt, B und C auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und D auf MR liegt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)
Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

836) Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft
$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$ finden kann!
Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

831) Lösung: 6 Punkte

Im folgenden seien die Namen der auf den Tipzetteln vermerkten drei Wettkampfteilnehmer mit A, B, C abgekürzt und die Platzverteilung durch die Reihenfolge dieser drei Buchstaben angegeben. Da A, B und C die ersten drei Plätze belegten und B nicht Erster wurde, kommen nur die folgenden Platzverteilungen in Frage:

(1) ABC, (2) ACB, (3) CAB, (4) CBA.

Nun läßt sich in einer Tabelle angeben, wieviel Punkte in den Fällen (1) bis (4) bei jeder der laut Aufgabenstellung möglichen Tipverteilungen hätten vergeben werden können:

1. Möglichkeit der Tipverteilung

| Platzverteilung | A B C | A C B | C A B | C B A |
|---|---|---|---|---|
| Tip BAC 5 mal | 0+0+5 | 0+0+0 | 0+5+0 | 0+0+0 |
| Tip BCA 4 mal | 0+0+0 | 0+4+0 | 0+0+0 | 0+0+4 |
| Tip CAB 3 mal | 0+0+0 | 0+0+3 | 3+3+3 | 3+0+0 |
| Summe | 5 | 7 | 14 | 7 |

2. Möglichkeit der Tipverteilung

| Platzverteilung | A B C | A C B | C A B | C B A |
|---|---|---|---|---|
| Tip BAC 5 mal | 0+0+5 | 0+0+0 | 0+5+0 | 0+0+0 |
| Tip BCA 3 mal | 0+0+0 | 0+3+0 | 0+0+0 | 0+0+3 |
| Tip CAB 4 mal | 0+0+0 | 0+0+4 | 4+4+4 | 4+0+0 |
| Summe | 5 | 7 | 17 | 7 |

Wie die Tabelle zeigt, wird die Gesamtpunktzahl 17 genau dann erreicht, wenn Claudia den Wettbewerb gewann, Annekatrin den zweiten und Bernd den dritten Platz erreichte sowie der Tip BCA genau 3 mal abgegeben wurde.

832) Lösung: 7 Punkte

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Die bei der Division der Zahlen a, b, c durch 3 auftretenden Reste sind paarweise verschieden.
Es lasse o.B.d.A. die Zahl a den Rest 0, die Zahl b den Rest 1 und die Zahl c den Rest 2.
Dann lassen sich a, b, c in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3m \\ b = 3n + 1 \\ c = 3s + 2 \end{array}\right\} \text{ mit natürlichen Zahlen } m, n, s.$$

Nun gilt: $a + b + c = 3m + 3n + 1 + 3s + 2$
$= 3\,(m + n + s) + 3$
$= 3\,(m + n + s + 1)$, d.h.

$$3 \mid a + b + c.$$

Fall 2: Es gibt unter den Zahlen a, b, c mindestens zwei Zahlen, die bei Division durch 3 den gleichen Rest r lassen. Das seien o.B.d.A. die Zahlen a und b.
Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3m + r \\ b = 3n + r \end{array}\right\} \text{ mit natürlichen Zahlen } m, n, r \text{ wobei } 0 \leqq r \leqq 2 \text{ gilt.}$$

Nun gilt: $a - b = 3m + r - (3n + r)$
$= 3\,(m - n)$, d.h.

$$3 \mid a - b.$$

833) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Falls benötigt, werden die Parallelogramme BIHC und CKLA wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:

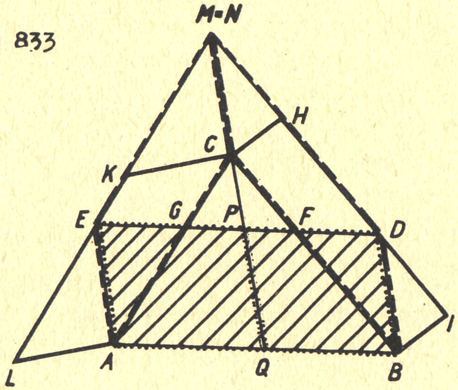
Man zieht durch C die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten BD und EA. Ihre Schnittpunkte mit ED bzw. AB seien P bzw. Q genannt. Die Gerade durch K und L schneide die genannte Parallele durch C in einem Punkte M, die Gerade durch I und H schneide sie in einem Punkte N. Dann sind ACME und CBDN ebenfalls Parallelogramme und es gilt $\overline{EA} = \overline{MC}$ sowie $\overline{BD} = \overline{NC}$, woraus wegen $\overline{EA} = \overline{BD}$ folgt, daß M = N ist. Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich:

einerseits ACKL, ACME und AQPE,

andererseits BIHC, BDMC und BDPQ.

Da der Flächeninhalt des Parallelogramms ABDE gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme AQPE und BDPQ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme ACKL und BIHC, w.z.b.w.

Abb. L 833



XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

834) <u>Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Für jede Lage des Punktes $P_1$ auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist $P_2$ so gelegen, daß $\overline{\sphericalangle AMP_2} = \frac{1}{4}\,\overline{\sphericalangle AMP_1} < \frac{1}{4} \cdot 180^\circ = 45^\circ$ gilt. Umgekehrt nimmt die Größe des $\sphericalangle AMP_2$ während der beschriebenen Bewegung alle Werte zwischen $0^\circ$ und $45^\circ$ an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind $Q_1$ bzw. $Q_2$ die Fußpunkte der von $P_1$ bzw. $P_2$ auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn (1) $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}$ gilt.

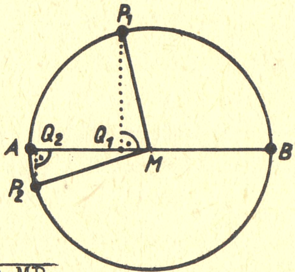



Abb. L 834

Im Falle $\overline{\sphericalangle AMP_1} < 90^\circ$ ist $\overline{\sphericalangle Q_2MP_2} = \overline{\sphericalangle AMP_2} = \frac{1}{4}\overline{\sphericalangle AMP_1} < \overline{\sphericalangle AMP_1} = \overline{\sphericalangle Q_1MP_1}$ und daher $\overline{P_2Q_2} < \overline{P_1Q_1}$. Im Fall $\overline{\sphericalangle AMP_1} = 90^\circ$ ist $\overline{\sphericalangle Q_2MP_2} = \overline{\sphericalangle AMP_2} = \frac{1}{4}\,\overline{\sphericalangle AMP_1} < 90^\circ$ und daher ebenfalls $\overline{P_2Q_2} < (\overline{MP_2} = \overline{MP_1} =)\ \overline{P_1Q_1}$ Also kann (1) in den Fällen $\overline{\sphericalangle AMP_1} \leqq 90^\circ$ nicht erfüllt werden.

Im Fall $\overline{\sphericalangle AMP_1} > 90^\circ$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn (2) $\overline{\sphericalangle BMP_1} = \overline{\sphericalangle Q_1MP_1} = \overline{\sphericalangle Q_2MP_2} = \overline{\sphericalangle AMP_2}$ gilt; denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit $180^\circ - 4 \cdot \overline{\sphericalangle AMP_2} = \overline{\sphericalangle AMP_2}$ und dies mit $\overline{\sphericalangle AMP_2} = 36^\circ$.

Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\sphericalangle AMP_2$ die Größe $36^\circ$ hat.

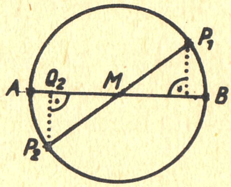



Abb. L 834;1

835) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

(I) Angenommen, ABCD sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei A′ ein Punkt auf MP. Es sei weiter Q der Fußpunkt des Lotes $l$ von M auf BC. Dann ist $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (ssw), also ist $l$ die Mittelsenkrechte von BC und daher auch die von AD. Somit gilt $\overline{MA} = \overline{MD}$. Die Parallele durch A′ zu AB schneide den Strahl aus M durch R in einem Punkt, der D′ genannt sei. Die Parallelen durch B′ zu BC und durch D′ zu DC mögen sich im Punkt C′ schneiden. Dann ist A′B′C′D′ ein Viereck, das aus ABCD durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $\overline{MA} = \overline{MD}$ auch $\overline{MA'} = \overline{MD'}$ gilt.

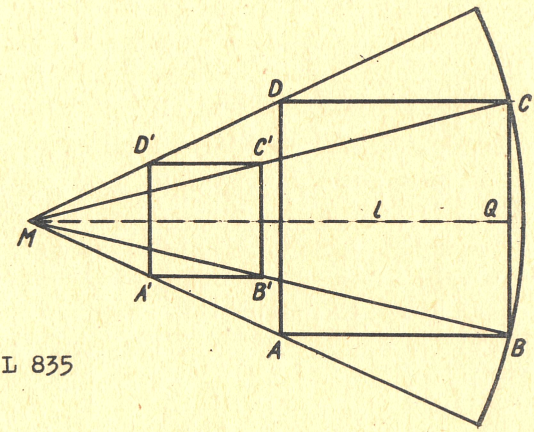



Abb. L 835

Da das Quadrat ABCD nicht auf derselben Seite von AD liegt wie M, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie M.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Quadrat ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man wählt auf MP einen beliebigen Punkt $A'$.

(2) Man schlägt den Kreis um M mit $\overline{MA'}$. Schneidet er den Strahl aus M durch R in einem Punkt, so sei dieser $D'$ genannt.

(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie M.

(4) Man zeichnet die von M ausgehenden Strahlen durch $B'$ bzw. $C'$. Schneiden sie den Bogen $\overset{\frown}{PR}$, so seien diese Schnittpunkte B bzw. C genannt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch B. Schneidet sie PM in einem Punkt, so sei dieser A genannt.

(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch C. Schneidet sie RM in einem Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Quadrat ABCD den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte $\ell$ von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $\overline{MA'} = \overline{MD'}$ geht sie durch M, ist also auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle B'MC'$. Schneidet sie BC in Q, so ist daher $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (sws), also $\ell$ auch senkrecht auf BC und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist ABCD durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen. Daher ist ABCD ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

836) <u>Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Angenommen, zu einer positiven rationalen Zahl a gebe es eine natürliche Zahl x, für die

(1) $\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$ gilt. Dann gilt auch

$100x - 8a = 5x + 1136$ bzw. $95x = 1136 + 8a$, also

(2) $$x = \frac{1136 + 8a}{95}.$$

Daher gibt es zu einer positiven rationalen Zahl a nur dann eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft (1), wenn $1136 + 8a$ durch 95 teilbar ist, wobei $8a > 0$ gilt. Da 1136 bei Division durch 95 den Rest 91 läßt, erhält man die kleinste Zahl a für $8a = 4$, sie lautet also $a = \frac{1}{2}$. Für sie ergibt sich nach (2) $x = 12$, also eine natürliche Zahl. Umgekehrt erfüllt $x = 12$ zusammen mit $a = \frac{1}{2}$ auch (1), wie man durch Einsetzen bestätigt. Also gibt es ein kleinstes a mit den geforderten Eigenschaften, und x nimmt hierfür den Wert 12 an.