A 8

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 8

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

821) Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht.
Es ist außerdem bekannt:

(1) Dieter steht an vierter Stelle.

(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.

(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.

(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben Jungen in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

822) Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$!

A 8

823) Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden.
Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet.
Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.

a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!

b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

824) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus
$c = 7{,}5$ cm, $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120^\circ$!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

821) Lösung: 10 Punkte

Erwin kann nicht an erster Stelle stehen, weil sonst im Widerspruch zu (4) wegen (2) Gerd Zweitgrößter sein müßte. Wegen (1) und (2) kann Erwin aber auch nicht an zweiter, dritter oder vierter Stelle stehen. Da er wegen (2) auch nicht an sechster oder siebenter Stelle stehen kann, steht er an fünfter Stelle, und wegen (2) ist dann Gerd Sechster und Bernd Siebenter. Die Plätze 1 bis 3 können somit nur Axel, Frank und Conrad eingenommen haben, und zwar wegen (3) Frank nur an erster oder zweiter Stelle. Würde Frank an erster Stelle stehen, so müßte Axel im Widerspruch zu (4) Zweitgrößter sein. Also steht Frank an zweiter, Axel an dritter und daher Conrad an erster Stelle. Die Reihenfolge der sieben Jungen lautet mithin:

Conrad, Frank, Axel, Dieter, Erwin, Gerd, Bernd.

822) **Lösung:** **10 Punkte**

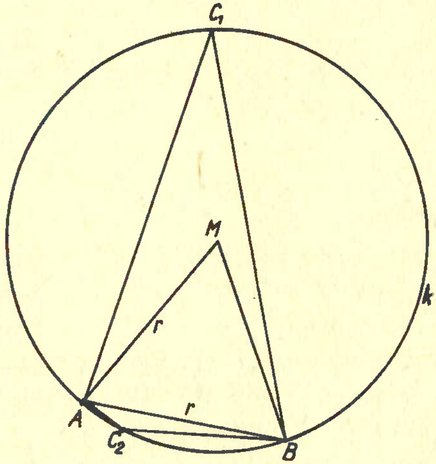


Abb. L 822

Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $\overline{AB} = \overline{AM} = r$. Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:

Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\sphericalangle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\sphericalangle AC_1B$ eine Größe von 30°.

Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegenden Winkel zu 180°. Daher hat der Winkel $\sphericalangle AC_2B$ eine Größe von $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

823) **Lösung:** **10 Punkte:** a) 5 Punkte b) 5 Punkte

a) Unter allen 1972-stelligen Zahlen hat diejenige die größte erste Quersumme, die aus 1972 Ziffern 9 besteht. Diese größte erste Quersumme beträgt somit $9 \cdot 1972 = 17\,748$. Da hiernach die erste Quersumme einer 1972-stelligen Zahl nicht größer als 17 748 sein kann, erhält man die größte zweite Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 10 bis 17 748 und folglich als Quersumme der Zahl 9999, d.i. 36. [Denn jede natürliche Zahl x mit $10 \leqq x < 9999$ hat höchstens vier Ziffern, aber nicht vier Ziffern 9, also hat x stets eine Quersumme < 36; jede natürliche Zahl y mit $9999 < y \leqq 17\,748$ aber hat genau fünf Ziffern, und zwar als erste eine 1, als zweite eine Ziffer < 8 und daher ebenfalls eine Quersumme < 36.][1]

Da hiernach die zweite Quersumme einer 1972-stelligen Zahl nicht größer als 36 sein kann, erhält man die größte dritte Quersumme als größte aller Quersummen der Zahlen von 1 bis 36 und folglich als Quersumme der Zahl 29, d.i. 11.

[1] Bemerkung zur Korrektur: Die in eckigen Klammern stehende Begründung ist, falls die vorangehende Aussage genügend klar formuliert wurde, zu einem vollständigen Lösungstext nicht erforderlich.

b) Unter allen Zahlen von 10 bis 36 ist 29 die einzige mit der Quersumme 11. Unter allen Zahlen mit der Quersumme 29 findet man wegen $\frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$ die kleinste, indem man eine Zahl mit den letzten drei Ziffern 9 so bildet, daß die aus den vorangehenden Ziffern bestehende Zahl die kleinste mit der Quersumme 2 ist. Diese Zahl ist offenbar 2 999.

Mit entsprechender Begründung findet man wegen $\frac{2999}{9} = 333\frac{2}{9}$ die kleinste 1972-stellige Zahl A mit der Quersumme 2999, indem man eine Zahl mit den letzten 333 Ziffern 9 so bildet, daß die aus den vorangehenden 1972 - 333 = 1639 Ziffern bestehende Zahl die kleinste 1639-stellige mit der Quersumme 2 ist. So ergibt sich die Zahl

$$A = 1\underbrace{0\ldots0}_{1637}1\underbrace{9\ldots9}_{333},$$

die der Reihe nach aus einer Ziffer 1, 1637 Ziffern 0, einer Ziffer 1 und 333 Ziffern 9 besteht.

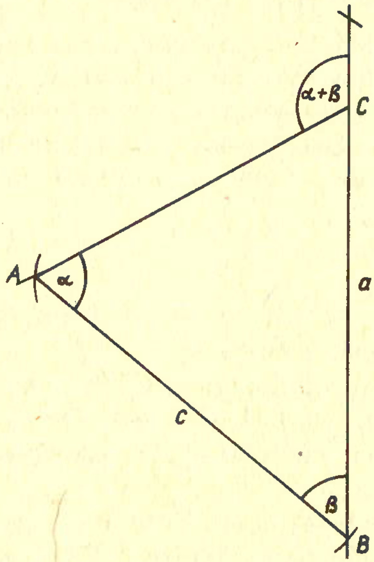
Ist nun g irgend eine von der kleinsten Zahl 2999 verschiedene, also größere Zahl mit der Quersumme 29 und hat eine 1972-stellige Zahl n die Zahl g als Quersumme, so gilt:

Wegen $\frac{g}{9} \geq \frac{3000}{9} = 333\frac{3}{9}$ hat die kleinste 1972-stellige Zahl B mit der Quersumme g als ihre letzten 333 Ziffern je eine 9 und unter den davor stehenden 1639 Ziffern mindestens eine Ziffer $\geqq 2$. Folglich ist $B > A$ und demnach erst recht $n > A$. Damit ist A als kleinste unter allen 1972-stelligen Zahlen nachgewiesen, die irgend eine Zahl mit der Quersumme 29 als Quersumme haben, d.h. aber, die die dritte Quersumme 11 besitzen.

824) Lösung: 10 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist durch die Außenwinkel bei C, deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es läßt sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann (Abb. L 824):



Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, $\overline{BC} = a = 6{,}5$ cm, $\overline{AB} = c = 7{,}5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.

Abb. L 824

(III) Beweis, daß jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach dem Außenwinkelsatz gilt
$\alpha + \beta = 180^\circ - \overline{\sphericalangle ACB} = 120^\circ$
und nach Konstruktion
$\overline{AB} = c = 7{,}5$ cm sowie $\overline{BC} = a = 6{,}5$ cm.

(IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.