

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

- 731) An einer Oberschule mit genau 500 Schülern bestehen mathematisch-naturwissenschaftliche, künstlerische und Sport-Arbeitsgemeinschaften. Über die Teilnahme von Schülern an diesen Arbeitsgemeinschaften ist folgendes bekannt:
- (1) Genau 250 Schüler sind Mitglied mindestens einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
  - (2) Genau 125 Schüler gehören mindestens einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft an.
  - (3) Genau 225 Schüler nehmen mindestens an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Arbeitsgemeinschaft teil.
  - (4) Genau 25 Schüler besuchen mindestens sowohl eine künstlerische als auch eine Sport-Arbeitsgemeinschaft.
  - (5) Genau 75 Schüler sind mindestens sowohl Mitglied einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch einer Sport-Arbeitsgemeinschaft.
  - (6) Genau 25 Schüler nehmen mindestens sowohl an einer mathematisch-naturwissenschaftlichen als auch an einer künstlerischen Arbeitsgemeinschaft teil.
  - (7) Genau 5 Schüler gehören allen drei genannten Arbeitsgemeinschaftsarten an.
- Ermittle die Anzahl aller Schüler dieser Schule, die
- a) an genau einer Art dieser Arbeitsgemeinschaften,
  - b) an keiner dieser Arbeitsgemeinschaften teilnehmen!

A 7;I

732) Beweise, daß es unter 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren kleinste nicht kleiner als 1 und deren größte nicht größer als 100 ist, stets mindestens zwei Zahlen gibt, von denen die eine gleich dem Doppelten der anderen ist.

733) Konstruiere ein konvexes Fünfeck ABCDE, das folgende Eigenschaften hat:

(1)  $\overline{AB} = \overline{CD} = 5 \text{ cm}$ ,

(2)  $\angle EAB = \angle ABC = 95^\circ$ ,

(3)  $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$ ,

(4)  $\overline{AE} = \overline{ED}$ .

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck ABCDE bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

**Achtung:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

734) Als die Klasse 7a den Fachunterrichtsraum für Mathematik betrat, war an der Wandtafel eine Multiplikationsaufgabe angeschrieben. Jemand hatte jedoch die Ziffern derart verwischt, daß nur noch vier "Einsen" leserlich geblieben waren und von den unleserlichen Ziffern lediglich noch die genaue Stellung zu erkennen war.

Das Bild an der Wandtafel hatte folgendes Aussehen:  
 (Die unleserlichen Ziffern sind hier durch die Buchstaben a,b,c,... angegeben. Dabei können also verschiedene Buchstaben auch die gleiche Ziffer, möglicherweise auch nochmals die Ziffer 1, bezeichnen.)

$$\begin{array}{r}
 \underline{1 a b \cdot c d} \\
 e f g 1 \\
 \underline{h i j 1} \\
 k m n 1 p \\
 =====
 \end{array}$$

Einige Schüler versuchten sofort, die fehlenden Ziffern zu ermitteln, und schon nach kurzer Zeit rief Bernd: "Ich weiß genau, wie die beiden Faktoren hießen!" Doch Gerd entgegnete ihm: "Es läßt sich nicht eindeutig feststellen, wie die beiden Faktoren lauteten."

Stelle fest, ob Bernd oder Gerd recht hatte!

Gib in jedem Falle alle Lösungen (Realisierungen) des Multiplikationsschemas an!



A 7;II

735) Ermittle alle nicht negativen rationalen Zahlen  $x$ , die die Gleichung  $x + |x - 1| = 1$  erfüllen!

736) Beweise den folgenden Satz:

Für jedes Dreieck  $\triangle ABC$  gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreiecksseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreiecksseite liegt.

L 7;1

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR  
3. Stufe (Bezirksolympiade)  
Lösungen und Punktbewertung  
Olympiadeklasse 7                   - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die  
1. Stufen gelten auch für die 3. Stufe.

731) Lösung:           6 Punkte:   a) 4 Punkte   b) 2 Punkte

Mit den Buchstaben M, S, K und den Buchstabengruppen MS, MK, SK, MSK seien die Anzahlen derjenigen Schüler bezeichnet, die an den entsprechenden Arbeitsgemeinschaften (M: math.-natw., S: Sport-AG, K: künstler. AG) teilnehmen, aber nicht an den übrigen. Mit N sei die Anzahl derjenigen Schüler bezeichnet, die an keiner der Arbeitsgemeinschaften teilnehmen. Dann folgt:

$$(0) \quad N + M + S + K + MS + MK + SK + MSK = 500,$$

$$(1) \quad \quad \quad S \quad + MS \quad \quad + SK + MSK = 250,$$

$$(2) \quad \quad \quad \quad K \quad + MK + SK + MSK = 125,$$

$$(3) \quad \quad M \quad \quad + MS + MK \quad \quad + MSK = 225,$$

$$(4) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad SK + MSK = 25,$$

$$(5) \quad \quad \quad \quad \quad MS \quad \quad \quad + MSK = 75,$$

$$(6) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad MK \quad \quad + MSK = 25,$$

$$(7) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad MSK = 5.$$

Wegen (7) und (4) bzw. (5) bzw. (6) ist

$$(8) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad SK = 20,$$

$$(9) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad MS = 70,$$

$$(10) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad MK = 20.$$

Wegen (7) und (1), (8), (9) bzw. (2), (8), (10) bzw. (3), (9), (10) ist

$$(11) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad S = 155,$$

$$(12) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad K = 80,$$

$$(13) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad M = 130.$$

Wegen (0), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) ist

$$(14) \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad N = 20.$$

Die in a) gesuchte Anzahl ist  $S + K + M$ ; wegen (11), (12), (13) beträgt sie 365.

Die in b) gesuchte Anzahl ist  $N$ ; wegen (14) beträgt sie 20.

L 7;I

732) Lösung: 6 Punkte

Die kleinste der 51 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei  $j$ . Dann gilt  $1 \leq j$ , und die aufeinanderfolgenden Zahlen lauten (1)  $j, j+1, j+2, \dots, j+49, j+50$ .  
Nun gilt laut Aufgabe  $j+50 \leq 100$ , also  $1 \leq j \leq 50$ .  
Folglich gehört  $j+j = 2j$  auch zu den in (1) aufgezählten 51 aufeinanderfolgenden Zahlen, w.z.b.w.

733) Lösung: 8 Punkte

- (I) Angenommen, ABCDE sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist  $\triangle BCE$  gleichseitig, also gilt  $\sphericalangle CBE = 60^\circ$ . Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da ABCDE konvex ist.  
Daher gilt:  $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC - \sphericalangle CBE = 95^\circ - 60^\circ = 35^\circ$ .
- (II) Daher erfüllt ein Fünfeck ABCDE nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
- ( $\alpha$ ) Wir konstruieren ein Dreieck  $\triangle ABE$  aus  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ,  $\sphericalangle EAB = 95^\circ$  und  $\sphericalangle ABE = 35^\circ$ .
- ( $\beta$ ) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius  $\overline{BE}$ . Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.
- ( $\gamma$ ) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius  $\overline{AE}$ . Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.
- (III) Beweis, daß jedes so konstruierte Fünfeck ABCDE den Bedingungen der Aufgabe entspricht:  
Nach Konstruktion ist  $\overline{AB} = \overline{CD} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$ ,  $\overline{AE} = \overline{DE}$ , also sind (1), (3), (4) erfüllt. Ferner ist  $\sphericalangle EAB = 95^\circ$ ,  $\sphericalangle ABE = 35^\circ$ , und, da  $\triangle BCE$  gleichseitig ist,  $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BCE = \sphericalangle BEC = 60^\circ$ .



Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABE + \sphericalangle CBE = 35^\circ + 60^\circ = 95^\circ$ , also ist auch (2) erfüllt, und es gilt  $\sphericalangle AEB = 180^\circ - 95^\circ - 35^\circ = 50^\circ$ . Weiterhin ist  $\triangle DCE \cong \triangle ABE$  (s,s,s), also  $\sphericalangle EDC = 95^\circ$ ,  $\sphericalangle DCE = 35^\circ$  und  $\sphericalangle DEC = 50^\circ$

Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt  $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCE + \sphericalangle DCE = 60^\circ + 35^\circ = 95^\circ$ .

Schließlich gilt  $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEB + \sphericalangle BEC + \sphericalangle DEC = 50^\circ + 60^\circ + 50^\circ = 160^\circ$ .

Also hat ABCDE an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als  $180^\circ$  ist, ist somit konvex.

- (IV) Konstruktionsschritt ( $\alpha$ ) ist wegen  $95^\circ + 35^\circ < 180^\circ$  nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt ( $\beta$ ) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d.h. es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C. Schließlich ist auch Konstruktionsschritt ( $\gamma$ ) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck ABCDE ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

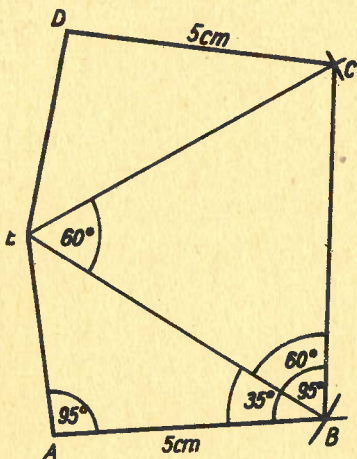


Abb. L 733

L 7;II

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR  
 3. Stufe (Bezirksolympiade)  
 Lösungen und Punktbewertung  
 Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die  
 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

734) Lösung:            7 Punkte

Offensichtlich gilt  $p = 1$  und  $g = 0$ .

Da in der zweiten und in der dritten Zeile je eine vierstellige Zahl steht, gilt  $d \neq 1$  und  $c \neq 1$ .

Das Produkt  $b \cdot d$  endet ebenso wie das Produkt  $b \cdot c$  mit 1.

Es sind nun genau die folgenden drei Fälle möglich:

1. Fall: Es sei  $b = 9$ ,  $c = d = 9$ .

Daraus folgt  $b \cdot d = 81$ . Wegen  $g = 0$  muß das Produkt  $a \cdot d$ , also  $a \cdot 9$ , mit der Ziffer 2 enden, (denn  $2 + 8 = 10$ ). Das ist aber genau für  $a = 8$  der Fall. Der erste Faktor heißt somit 189, der zweite 99.

Tatsächlich führt die Rechnung  $189 \cdot 99$  zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.

2. Fall: Es sei  $b = 7$ ,  $c = d = 3$ .

Da der erste Faktor kleiner als 200 ist, ist sein Dreifaches kleiner als 600, also eine dreistellige Zahl, was im Widerspruch zur zweiten Zeile steht. Dieser Fall führt somit zu keiner Lösung.

3. Fall: Es sei  $b = 3$ ,  $c = d = 7$ .

Daraus folgt  $b \cdot d = 21$ . Das Produkt  $a \cdot d$ , also  $a \cdot 7$ , muß dann mit der Ziffer 8 enden (denn  $2 + 8 = 10$ ). Das ist genau für  $a = 4$  der Fall. Als erster Faktor ergibt sich damit 143, der zweite lautet 77. Tatsächlich führt die Rechnung  $143 \cdot 77$  zu einem Tafelbild, das der Aufgabenstellung entspricht.



L 7;II

Das Multiplikationsschema hat somit genau zwei, und zwar die beiden folgenden Realisierungen:

$$\begin{array}{r} 189 \cdot 99 \\ \hline 1701 \\ 1701 \\ \hline 18711 \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 143 \cdot 77 \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ \hline 11011 \\ \hline \hline \end{array}$$

Gerd hatte also recht, Bernd dagegen nicht.

735) Lösung:            6 Punkte

Es sei  $x$  eine beliebige rationale Zahl, für die  $0 \leq x \leq 1$  gilt. Dann gilt  $x + |x - 1| = x + 1 - x = 1$ , also ist die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen alle rationalen Zahlen  $x$ , für die  $0 \leq x \leq 1$  gilt, diese Gleichung. Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl  $x > 1$ , die die Gleichung  $x + |x - 1| = 1$  erfüllt. Dann wäre  $1 = x + |x - 1| = x + x - 1$  und somit  $2x = 2$ , also  $x = 1$ , im Widerspruch zu  $x > 1$ . Also gibt es keine rationale Zahl  $x > 1$ , die die gegebene Gleichung erfüllt. Daher erfüllen genau alle diejenigen nicht negativen rationalen Zahlen  $x$ , für die  $(0 \leq) x \leq 1$  gilt, die gegebene Gleichung.

736) Lösung:            7 Punkte

Die zwei im Satz genannten Höhen seien o.B.d.A. die zu  $AB$  und  $AC$  gehörenden. Ihre Fußpunkte seien  $D$  bzw.  $E$ , ihre Mittelpunkte  $M$  bzw.  $N$ .

Die genannten Parallelen,  $g$  parallel zu  $AB$  durch  $M$  bzw.  $h$  parallel zu  $AC$  durch  $N$ , sind nicht parallel zueinander (da  $AB$  nicht zu  $AC$  parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte. Nun schneidet  $g$  den Strahl aus  $B$  durch  $C$  (da

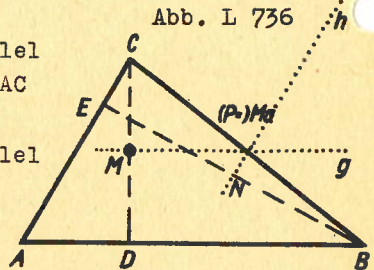


Abb. L 736

$M$  und  $C$  auf derselben Seite der Geraden durch  $A$  und  $B$  liegen) in einem Punkt  $P$ . Ist  $F$  der Flächeninhalt des Dreiecks  $\triangle ABC$ , so haben die Dreiecke  $\triangle ABM$  und  $\triangle ABP$  jeweils

L 7;II

den Flächeninhalt  $\frac{1}{2} F$ ; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge  $\overline{CD}$ , in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge  $\overline{MD} = \frac{1}{2} \overline{CD}$ . Da nun die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle ABP$  in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt  $\overline{BP} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ . Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt  $M_a$ .

Analog beweist man, daß auch h die Strecke BC in  $M_a$  schneidet. Daher ist  $M_a$  ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da  $M_a$  auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.