XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

721) Man ermittle alle Paare (x,y) natürlicher Zahlen x und y, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen x und y beträgt 15 390.

(2) Setzt man die einstellige Zahl x vor die Zahl y, so erhält man eine Zahl z, die viermal so groß ist wie die Zahl u, die man erhält, indem man die Zahl x hinter die Zahl y setzt.

722) Beweise den folgenden Satz:

Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d. h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

A 7

723) Über das Alter von vier Tennisspielern Arnold, Bruno, Christoph und Detlef ist folgendes bekannt:

(1) Alle vier Spieler sind zusammen 100 Jahre alt.

(2) Arnold und Bruno sind zusammen genau so alt wie Christoph und Detlef zusammen.

(3) Christoph ist älter als Detlef.

(4) Bildet man alle möglichen "Doppel" (Gruppen aus zwei Spielern), die sich aus den vier Spielern bilden lassen, dann besteht genau eines dieser "Doppel" aus zwei gleichaltrigen Spielern.

(5) Der älteste der vier Spieler ist vier Jahre älter als der jüngste.

Wie alt ist jeder der vier Spieler?
(Sämtliche Angaben in vollen Lebensjahren)

724) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50^\circ$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

XII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

721) Lösung 9 Punkte

(I) Angenommen, zwei Zahlen x und y haben die geforderten Eigenschaften. Dann gilt:

(1) $x + y = 15\,390$,

(2) $z = 4\,u$.

Nach (1) und weil x einstellig ist, hat y als vorletzte Ziffer eine 8 und als letzte Ziffer nicht 0.

Wegen (2) ist z durch 4 teilbar. Nach den Teilbarkeitsregeln für die Zahl 4 stellen daher die letzten beiden Ziffern von z, das sind auch die von y, eine durch 4 teilbare Zahl dar. Somit endet y auf 84 oder 88.

Daher kann nur $x = 6$ oder $x = 2$ sein.

Wäre $x = 2$, so wäre $y = 15\,388$, und man erhielte $z = 215\,388$ sowie $u = 153\,882$ im Widerspruch zu $4 \cdot 153\,882 = 615\,528 \neq 215\,388$.

Daher können nur $x = 6$ und $y = 15\,384$ die geforderten Eigenschaften haben.

(II) In der Tat erfüllen diese beiden Zahlen (1), und man erhält mit ihnen ferner $z = 615\,384$ sowie $u = 153\,846$, so daß wegen $4 \cdot 153\,846 = 615\,384$ auch (2) erfüllt ist.

Somit gibt es genau die Möglichkeit $x = 6$, $y = 15\,384$, die Bedingungen (1) und (2) zu erfüllen.

722) <u>Lösung</u> <u>8 Punkte</u>

In dem Viereck ABCD sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung:

$\overline{AE} = \overline{EC}$ sowie $\overline{BE} = \overline{ED}$

Nun gilt weiter: $\sphericalangle AEB \cong \sphericalangle DEC$ als Scheitelwinkel und ebenso $\sphericalangle AED \cong \sphericalangle BEC$.

Daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AEB \cong \triangle DEC \\ \triangle AED \cong \triangle BEC\end{array}\right\} \quad (s,\ w,\ s)$$

Folglich gilt:

$$\sphericalangle EAB \cong \sphericalangle ECD \quad (1) \text{ sowie}$$
$$\sphericalangle EAD \cong \sphericalangle ECB \quad (2).$$

Aus (1) folgt: $AB \parallel DC$,
aus (2) folgt: $AD \parallel BC$, Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

d.h. ABCD ist ein Parallelogramm, w. z. b. w.

723) <u>Lösung</u> <u>11 Punkte</u>

Das in Jahren angegebene Alter der vier Spieler sei der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnet. Nun gilt laut Aufgabe:

(1) $a + b + c + d = 100.$

(2) $a + b = c + d.$

(3) $c > d.$

Aus (1) und (2) folgt

(6) $a + b = c + d = 50$

Wäre nun $a = c$ oder $a = d$ oder $b = c$ oder $b = d$, so folgte daraus wegen (2) $b = d$ bzw. $b = c$ bzw. $a = d$ bzw. $a = c$ im Widerspruch zu (4).

Hiernach und wegen (3) folgt aus (4) und (6), daß $a = b = 25$ sein muß.

Wegen (6) und (3) gilt ferner $c > 50 - c$, also $c > 25$, und daher $d = 50 - c < 25$.

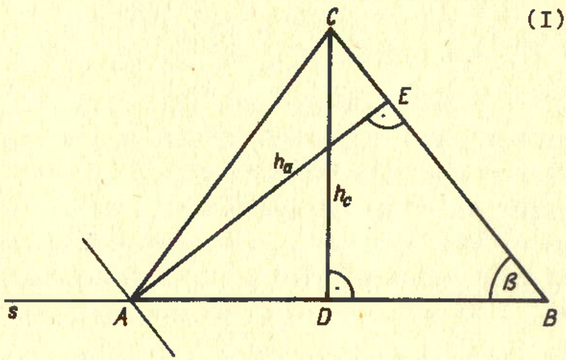
Somit ist Christoph der älteste und Detlef der jüngste der vier Spieler. Wegen (5) gilt daher $c - d = 4$, woraus zusammen mit (6) dann $c = 27$ und $d = 23$ folgt.
Also ist Christoph 27 Jahre alt, Arnold und Bruno sind je 25 Jahre alt und Detlef ist 23 Jahre alt.

(Hinweis zur Korrektur analog wie zu 622.)

*) Andere Fortsetzung

Wegen (2), (3) und (4) gilt $a = b$.
Wäre nämlich in jedem der Paare (Arnold; Bruno) bzw. (Christoph; Detlef) je einer der beiden Gleichaltrigen, dann müßten auch die beiden anderen gleichaltrig sein, was (4) widerspricht.
Da somit Christoph älter als Detlef ist, beide zusammen aber genau so alt wie die beiden gleichaltrigen Arnold und Bruno zusammen sind, ist Christoph der älteste und ....

724) Lösung 12 Punkte



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll (Abb. L 724). Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D.

Abb. L 724

Dann gilt für das Dreieck $\triangle BCD$ wegen $\beta < 90^\circ$:
$\overline{\sphericalangle DBC} = \beta$, $\overline{\sphericalangle BDC} = 90^\circ$ und $\overline{CD} = h_c$.
Punkt A liegt
1. auf dem Strahl s aus B durch D und
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf der auf derselben Seite von BC wie D liegenden, weil A auf dem Strahl s liegt.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle BCD$ aus den Winkeln $\sphericalangle DBC$, $\sphericalangle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, 90° bzw. h_c sind.

(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.

(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion hat der Winkel $\sphericalangle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\sphericalangle DBC$, und dieser hat die Größe β, ferner ist $\overline{CD} = h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta < 90^\circ$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken $\triangle ABC$ gelangt.
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.