XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen.
Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/IV)1) Es sind alle reellen Zahlen x anzugeben, für die der Ausdruck

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \qquad (1)$$

existiert, und unter diesen alle x zu ermitteln, die die folgende Ungleichung (2) erfüllen:

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \qquad (2).$$

11/12/IV/2)

$$\text{Es sei } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2+\tan^2 x} & \text{für alle reellen } x, \text{ für die } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ gilt } (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \\ 0 & \text{für alle } x = \frac{\pi}{2} + k\pi . \end{cases}$$

Man beweise, daß die für alle reellen x durch $F(x) = f(x) + f(ax)$ definierte Funktion F genau dann periodisch ist, wenn die Konstante a eine rationale Zahl ist.

11/12/IV/3) Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei Punkte P_i, P_j (i,j = 1, 2, 3) bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen 0° und 180° liegt. Man beweise, daß für diese Größen die Ungleichung

$$\alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12}$$ gilt.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.
Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/IV/4)

a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung

$$x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$$

erfüllen.

b) Man gebe unter den in (a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

11/12/IV/5) Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen x, geschrieben im dekadischen Positionssystem, für die gilt:

Fügt man an die Ziffernfolge der Zahl x rechts die Ziffernfolge $x + 1$ an, so erhält man die Ziffernfolge einer sechsstelligen Quadratzahl.

A 11/12;II

Von den nachstehenden Aufgaben 11/12/IV/6.1 und 11/12/IV/6.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

11/12/IV/6.1) Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leqq n \leqq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, daß auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt.

Man beweise, daß dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

11/12/IV/6.2) Als "Abstand" zweier Funktionen f und g, die im gleichen Intervall definiert sind, bezeichne man den größten aller in diesem Intervall auftretenden Werte $|f(x) - g(x)|$, falls ein solcher größter Wert existiert.

Es seien die im Intervall $-2 \leqq x \leqq 2$ durch $f(x) = 2 - |x|$ und die im gleichen Intervall durch $g(x) = -ax^2 + 2$ (a eine positive reelle Zahl) definierten Funktionen f und g gegeben. Man untersuche, ob es einen Wert a gibt, für den der "Abstand" von f und g möglichst klein ist. Gibt es ein solches a, so gebe man alle derartigen Werte a an.

L 11/12;I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

11/12/IV/1) Lösung:

5 Punkte

1. Für $x \leqq 3$ ist $|x-3| = 3 - x$, der Ausdruck (1) also bezüglich Existenz und Wert gleichbedeutend mit $\frac{-2x + 1}{x + 2}$.

1.1. Für $x < -2$ existiert (1). Ferner ist $x + 2 < 0$, also (2) genau erfüllt, wenn

$$-2x + 1 \leqq x + 2$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x \geqq -\frac{1}{3}$$

ist, was zu $x < -2$ im Widerspruch steht, gibt es kein $x < -2$, das (2) erfüllt.

1.2. Für $x = -2$ existiert (1) nicht.

1.3. Für $-2 < x \leqq 3$ existiert (1). Ferner ist $x + 2 > 0$, also (2) genau dann erfüllt, wenn

$$-2x + 1 \geqq x + 2$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x \leqq -\frac{1}{3}$$

ist, erfüllen von den x mit $-2 < x \leqq 3$ genau die x mit $-2 < x \leqq -\frac{1}{3}$ die Ungleichung (2).

2. Für $x > 3$ ist $|x - 3| = x - 3$, der Ausdruck (1) also bezüglich Existenz und Wert gleichbedeutend mit $\frac{2x}{x - 8} + \frac{1}{x + 2}$.

2.1. Für $3 < x < 8$ existiert (1). Ferner ist $(x - 8)\cdot(x + 2) < 0$, also (2) genau dann erfüllt, wenn

$$2x(x + 2) + x - 8 \leqq (x - 8)(x + 2)$$

gilt.

Da dies äquivalent mit

$$x^2 + 11x + 8 \leqq 0$$

ist, was zu $x^2 + 11x + 8 > 3^2 + 11 \cdot 3 + 8$ im Widerspruch steht, gibt es kein x mit $3<x<8$, das (2) erfüllt.

2.2. Für $x = 8$ existiert (1) nicht.

2.3. Für $x > 8$ existiert (1). Ferner ist $(x - 8)(x + 2) > 0$, also (2) genau dann erfüllt, wenn

$$2x\,(x + 2) + x - 8 \geqq (x - 8)(x + 2)$$

gilt. Da dies äquivalent mit

$$x^2 + 11x + 8 \geqq 0$$

ist, was für $x > 8$ stets richtig ist, erfüllen alle $x > 8$ die Ungleichung (2).

Ergebnis: (1) existiert, wenn $x \neq -2$ und $x \neq 8$ gilt; (2) wird genau dann erfüllt, wenn entweder $-2 < x \leqq -\frac{1}{3}$ oder $x > 8$ gilt.

11/12/IV/2) <u>Lösung:</u>

8 Punkte | (I) Angenommen, F sei periodisch. Dann gibt es eine von Null verschiedene reelle Zahl t mit der Eigenschaft, daß $F(x) = F(x + t)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Insbesondere gilt

$$1 = F(0) = F(t) \qquad (1)$$

Aus (1) folgt zunächst, daß t und at von allen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) verschieden sind, weil sonst $F(t) < 1$ wäre. Hiernach ergibt sich aus (1) weiter

$$1 = \frac{1}{2+\tan^2 t} + \frac{1}{2+\tan^2 at} \qquad (2).$$

Aus (2) folgt, da jeder der beiden Summanden auf der rechten Seite kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{1}{2+\tan^2 t} = \frac{1}{2}, \text{ also } t = m\pi \;, \qquad (3)$$

und

$$\frac{1}{2+\tan^2 at} = \frac{1}{2}, \text{ also } at = n\pi \;, \qquad (4)$$

wobei m und n ganze Zahlen sind und wegen $t \neq 0$ auch $m \neq 0$ gilt.

Aus (3) und (4) erhält man durch Division

$$a = \frac{n}{m}, \text{ d. h. } a \text{ ist eine rationale Zahl.}$$

Mithin ist F höchstens dann periodisch, wenn a rational ist.

(II) Angenommen, a sei eine rationale Zahl, d. h. es gelte $a = \frac{n}{m}$, wobei n und m ganze Zahlen sind und $m \neq 0$ gilt.

Auf Grund der Definition von f hat f die Periode π, also gilt für alle reellen x

$$f(x) = f(x + m\pi)$$

sowie

$$f(ax) = f(ax + n\pi) = f(a(x + m\pi))$$

und daher

$$F(x) = F(x + m\pi).$$

Wegen $m \neq 0$ ist somit F periodisch.

Aus (I) und (II) folgt daher, daß F genau dann periodisch ist, wenn a eine rationale Zahl ist.

11/12/ IV/3) <u>Lösung:</u>

7 Punkte

Auf den Strahlen aus Q durch P_1, P_2, P_3 seien bezüglich Punkte $X, Y, Z \neq Q$ mit $\overline{QX} = \overline{QY} = \overline{QZ}$ gewählt. Dann gilt:

(1) Der Fußpunkt Y' des Lotes von Y auf die Ebene ε durch Q, X, Z liegt im Innern des Kreises k in ε um Q durch X.

<u>Beweis:</u> Y liegt auf der Kugel K um Q durch X, aber nicht in der Ebene ε; diese schneidet aus K den Größtkreis k aus. Daraus folgt $\overline{YY'} > 0$, also die Behauptung $\overline{QY'} < \overline{QX}$.

(2) Klappt man $\triangle QXY$ um die Gerade x durch Q, X in die Ebene ε, so geht das von dem Bild Y_x des Punktes Y auf x gefällte Lot l_x durch Y'.

Beweis: Der Fußpunkt L von l_x ist wegen $\triangle QXY \cong \triangle QXY_x$ auch der Fußpunkt des von Y auf x gefällten Lotes. Also liegt L in der auf x senkrechten Ebene η durch Y, Y_x. Das Lot von Y auf ε ist senkrecht zu allen Geraden in ε, also auch zu x, folglich verläuft es in η. Sein Fußpunkt Y' liegt daher in der Schnittgeraden l_x von η mit ε, w.z.b.w..

(3) Analog gilt: Klappt man $\triangle$ QZY um die Gerade z durch Q, Z in die Ebene ε, so geht das von dem Bild Y_z des Punktes Y auf z gefällte Lot l_z durch Y'.

(4) Angenommen nun, im Gegensatz zur Behauptung wäre

$$\overline{\sphericalangle YQZ} + \overline{\sphericalangle ZQX} \leqq \overline{\sphericalangle XQY}.$$

Wir klappen $\triangle$ QXY um x in ε so, daß Y_x mit Z auf derselben Seite von x liegt. Ferner klappen wir $\triangle$ QZY um z in ε so, daß Y_z und X auf verschiedenen Seiten von z liegen. Aus der Annahme folgte dann $\overline{\sphericalangle Y_zQZ} + \overline{\sphericalangle ZQX} \leqq \overline{\sphericalangle XQY_x}$, also lägen X, Z, Y_z, Y_x in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreisbogen von k, wobei $X \neq Z$, $Z \neq Y_z$ gilt, jedoch $Y_z = Y_x$ sein kann.

(5) Die Lote l_x und l_z schneiden sich nicht im Innern von k.

<u>Beweis:</u> Es sei s_x der Strahl aus Y_x senkrecht zu x hin, s_z der Strahl aus Y_z senkrecht zu z hin, u der Strahl aus Y_z senkrecht zu x hin, t derjenige k berührende Strahl aus Y_z, der mit X auf derselben Seite der Trägergeraden von u liegt. Dann verläuft s_z in das Innere des von u, t gebildeten Winkelraumes hinein und hat daher mit s_x keinen Punkt außer eventuell $Y_z = Y_x$ gemeinsam.

Die Aussagen (1), (2), (3), (5) bilden einen Widerspruch, der die Annahme (4) widerlegt.

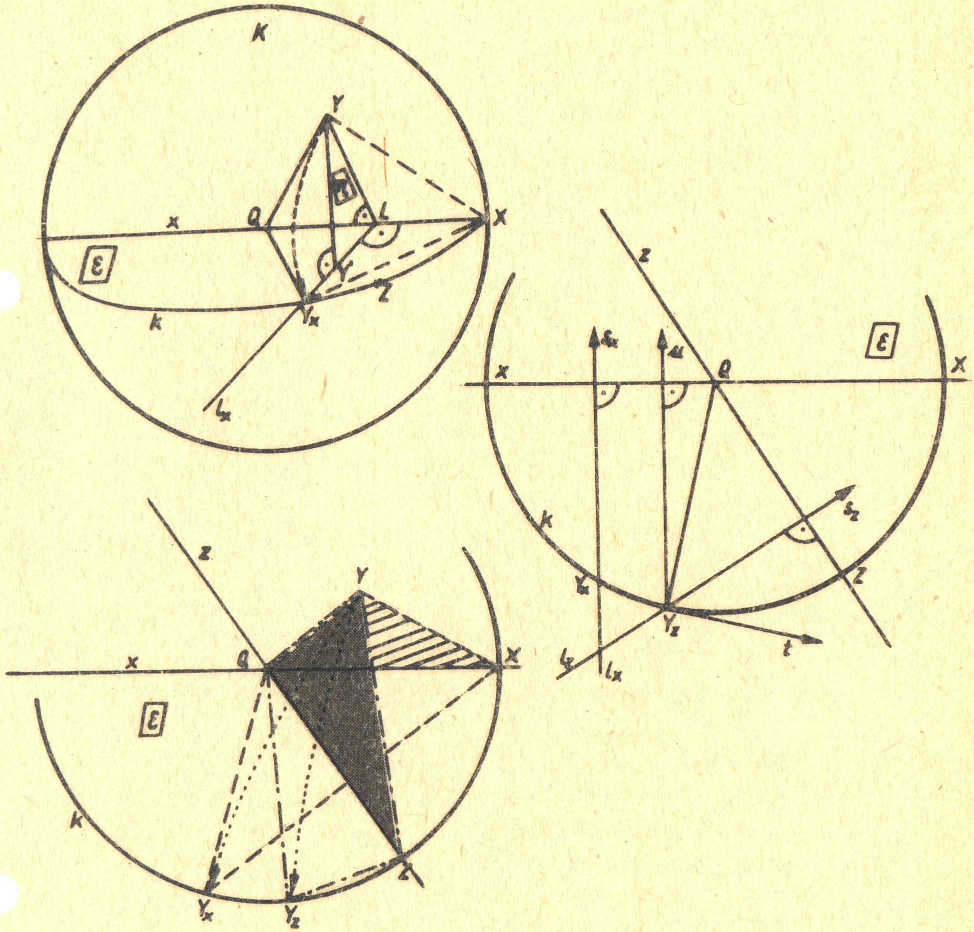


Abb. L 11/12;3

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

11/12/IV/4) Lösung:

2 Punkte

a) Aus der in der Aufgabe genannten Gleichung folgt $(x^2 + 1)(xz + y - x^3) = 0$, wegen $x^2 + 1 \neq 0$ also $xz + y - x^3 = 0$.
Somit können höchstens Tripel (x, x^3-xz, z) mit beliebigen reellen Zahlen x, z die genannte Gleichung erfüllen. Eine Probe zeigt, daß jedes solche Tripel dies auch tut.

3 Punkte

b) Angenommen, (x, y, z) sei ein Tripel der in (a) genannten Art, das zusätzlich die in (b) aufgeführten Bedingungen erfüllt.
Wäre in diesem Tripel $x = 0$, so folgte aus (a) auch $y = 0$, und (x, y, z) wäre keine Lösung der Aufgabe (b).
Wäre $z = 0$, so folgte $y = x^3$ und daraus, daß x und y gleichzeitig positiv bzw. negativ bzw. 0 wären, (x, y, z) wäre also keine Lösung der Aufgabe (b).
Falls es mithin ein unter (b) gesuchtes Tripel gibt, muß $y = 0$ und somit $x \neq 0$ sein, so daß aus $y = x^3 - xz$ weiter $z = x^2 > 0$ und damit $x < 0$ folgt.
Somit können höchstens Tripel $(x, 0, x^2)$ mit negativen x die in (a) und (b) geforderten Eigenschaften haben.
Eine Probe zeigt, daß jedes solche Tripel diese Eigenschaften besitzt.

Insgesamt 5 Punkte

11/12/IV/5) Lösung:

7 Punkte

Die Ermittlung aller dreistelligen natürlichen Zahlen x, die der angegebenen Bedingung genügen sollen, ist gleichbedeutend mit der Lösung der diophantischen Gleichung (1) $y^2 = 1000x + x + 1$, wobei

(3) $100 \leq x < 999$ und folglich (4) $316 < y < 1000$ ist. Die Gleichung (1) ist äquivalent mit der Gleichung $y^2 - 1 = 1001\,x$ bzw. mit der Gleichung (2) $(y-1)\cdot(y+1) = 1001\,x$. Es gilt daher: 1001 ist ein Teiler von $(y-1)\cdot(y+1)$. Wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ und wegen der Bedingung (4) muß y einer der folgenden Bedingungen genügen:

(5) $y = 11 \cdot 13a \pm 1$, d. h. $y = 143a \pm 1$, wobei $2 < a < 7$ ist.

(6) $y = 7 \cdot 13b \pm 1$, d. h. $y = 91b \pm 1$, wobei $3 < b < 11$ ist.

(7) $y = 7 \cdot 11c \pm 1$, d. h. $y = 77c \pm 1$, wobei $4 < c < 13$ ist.

Diese Fälle sind nun nacheinander zu untersuchen:

Fall (5):
Setzt man anstelle von y in Gleichung (2) den Term $143a \pm 1$, so erhält man:

$$143a(143a \pm 2) = 1001\,x,$$

bzw.
$$143a^2 \pm 2a = 7x,$$

bzw.
$$140a^2 + 3a^2 \pm 2a = 7x,$$

bzw.
$$140a^2 + a(3a \pm 2) = 7x.$$

Hieraus folgt: $7 \mid a(3a \pm 2)$. Da $2<a<7$ ist, brauchen im weiteren nur noch die Zahlen $y = 143 \cdot 3-1 = 428$ und $y = 143 \cdot 4 + 1 = 573$ untersucht zu werden.

Wegen $428^2 = 183184$, $573^2 = 328329$, sind 183 und 328 zwei der gesuchten Zahlen.

Fall (6):
Setzt man anstelle von y in Gleichung (2) den Term $91b \pm 1$, so erhält man:

$$91b\,(91b \pm 2) = 1001x,$$

bzw.
$$91b^2 \pm 2b = 11x,$$

bzw.
$$88b^2 + b(3b \pm 2) = 11x.$$

Hieraus folgt: $11 \mid b(3b \pm 2)$. Da $3<b<11$ ist, braucht im weiteren nur noch die Zahl $y = 91 \cdot 8 - 1 = 727$ untersucht zu werden.

Wegen $727^2 = 528529$ ist auch 528 eine der gesuchten Zahlen.

Fall (7):
Setzt man anstelle von y in Gleichung (2) den Term $77c \pm 1$, so erhält man:

$$77c\,(77c \pm 2) = 1001x,$$
bzw.
$$77c^2 \pm 2c = 13x,$$
bzw.
$$65c^2 + c(12c \pm 2) = 13x.$$

Hieraus folgt: $13 \mid c \cdot (12c \pm 2)$. Da $4 < c < 13$ ist, braucht im weiteren nur noch die Zahl $y = 77 \cdot 11 - 1 = 846$ untersucht zu werden.
Wegen $846^2 = 715716$ ist auch 715 eine der gesuchten Zahlen. Weitere solcher Zahlen kann es nicht geben; alle gesuchten Zahlen sind also:

183, 328, 528, 715.

11/12/IV/6.1) <u>Lösung:</u>

8 Punkte

Beweis (indirekt): Angenommen, es lägen nicht alle P_k ($k = 1, \ldots, n$; $n \leqq 8$), auf derselben Geraden. Dann bezeichne P_{ij} einen von P_i und P_j verschiedenen der Punkte P_k, der auf der Geraden g_{ij} durch P_i und P_j liegt. Ein solcher Punkt P_{ij} existiert nach Voraussetzung für alle $i, j = 1, \ldots, n$ ($n \leqq 8$).

Nun kann o.B.d.A. angenommen werden:
$P_{12} = P_3$; P_4 liege nicht auf der Geraden g_{12} (durch P_1 und P_2); $P_{14} = P_5$; $P_{24} = P_6$; $P_{34} = P_7$.
Es liegt also keiner der Punkte P_5, P_6, P_7 auf g_{12}. Daraus folgt, daß die obige Annahme höchstens für $n \geqq 7$ gelten kann.

Lägen nun P_1, P_6, P_7 nicht auf derselben Geraden, so wäre $P_{16} \neq P_7$ und folglich (wegen $n \leqq 8$) $P_{16} = P_8$; (denn $P_{16} = P_2$ oder $= P_3$ ist nicht möglich, weil P_6 nicht auf g_{12} liegt, $P_{16} = P_4$ oder $= P_5$ ist ebenfalls nicht möglich, weil sonst $g_{14} = g_{24}$ wäre). Aus demselben Grunde wäre $P_{17} = P_8$, d. h. P_6 und P_7 lägen auf g_{18} und mithin doch auf ein und

derselben Geraden durch P_1.
Also liegen P_1, P_6, P_7 auf derselben Geraden, und es ist o.B.d.A. $P_{16} = P_7$.

Entsprechend folgt (1) $P_{25} = P_7$ und $P_{35} = P_6$.

Nun kann weiter die Bezeichnung der Punkte so gewählt werden, daß P_2 auf der Strecke P_1P_3 und P_5 auf der Strecke P_1P_4 liegen. Mithin liegt P_6 als Schnittpunkt von P_2P_4 mit P_3P_5 auf P_2P_4 und weiter P_7 als Schnittpunkt von g_{16} mit g_{34} auf P_3P_4. Daher schneiden sich die Strecken P_5P_7 und P_2P_4 in einem inneren Punkt, und es kann P_2 als Endpunkt von P_2P_4 nicht auf der Geraden g_{57} liegen, d. h. es wäre $P_{25} \neq P_7$ im Widerspruch zu (1).

Damit ist der geforderte Beweis erbracht.
Anmerkung: Im Gegensatz zur folgenden Lösung wurden bei dem oben angeführten Beweis die Begriffe "Länge" bzw. "Abstand" nicht verwendet.

Anderer Lösungsweg

Angenommen, es existieren in der Menge $\mathfrak{M}$ der genannten n Punkte drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer und derselben Geraden liegen. Für jedes geordnete Tripel (A, B, C) aus drei solchen Punkten aus $\mathfrak{M}$ bezeichne a (A, B, C) den Abstand von A zu der Geraden g durch B und C. Da es nur endlich viele solche Tripel gibt, gibt es unter diesen eines mit kleinstem a (A, B, C).

Auf g liegt nach Voraussetzung ein von B und C verschiedener Punkt D aus $\mathfrak{M}$. Bei geeigneter Bezeichnung liegt B zwischen C und D, so daß von den Dreiecken $\triangle ABD$, $\triangle ABC$ eines, etwa $\triangle ABC$, bei B stumpf- oder rechtwinklig ist. Dann ist $\overline{AC} > \overline{BC}$, also, da sich die Längen der Dreieckshöhen umgekehrt wie die Längen der zugehörigen Seiten verhalten, $a(B, A, C) < a(A, B, C)$, im Widerspruch zur Auswahl des Tripels (A, B, C).

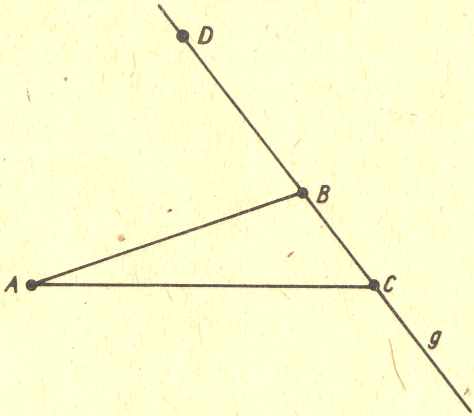


Abb. L 11/12;6.1

Bemerkung:
Wie der obenstehende Lösungsweg zeigt, ist die zu beweisende Behauptung sogar für jede natürliche Zahl n gültig. Die Gültigkeit dieser so verallgemeinerten Aussage wurde bereits 1893 von James Joseph Sylvester vermutet . Ein noch verhältnismäßig komplizierter Beweis wurde erst 1933 durch T. Gallai gegeben. Man spricht daher auch vom Sylvester-Gallai-Theorem. Erst später gelang auch ein elementarer Beweis von der oben angegebenen Art.

11/12/IV/6.2 Lösung:

8 Punkte

Zur Abkürzung sei $D(x) = f(x) - g(x)$ und $B(x) = |D(x)|$ gesetzt. Da f, g und folglich auch D, B gerade Funktionen sind, genügt es, das Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ zu untersuchen. In diesem Intervall ist $D(x) = ax^2 - x$.

Die Funktion D hat, zunächst im Intervall $x \geqq 0$ betrachtet, folgende Eigenschaften, die man entweder aus der Zerlegung

$D(x) = x(ax - 1)$ sowie der Ableitung $D'(x) = 2ax-1$ oder aber aus der geometrischen Deutung von $D(x) = a\,(x - \frac{1}{2a})^2 - \frac{1}{4a}$ (Parabel $y = x^2$, mit dem Faktor a gedehnt oder gestaucht und dann so verschoben, daß der Scheitel die Koordinaten $\frac{1}{2a}$,$- \frac{1}{4a}$ hat) ablesen kann:

Für $x = 0$ ist $D(x) = 0$.

Für $0 < x < \frac{1}{a}$ ist $D(x) < 0$.

Für $x = \frac{1}{a}$ ist $D(x) = 0$.

Für $x > \frac{1}{a}$ ist $D(x) > 0$.

Im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2a}$ ist $D(x)$ streng monoton fallend.

Im Intervall $x \geqq \frac{1}{2a}$ ist $D(x)$ streng monoton steigend.

Daraus ergeben sich für die Funktion B, auch zunächst im Intervall $x \geqq 0$ betrachtet, folgende Eigenschaften

Im Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2a}$ ist $B(x) = - D(x)$ streng monoton steigend.

Im Intervall $\frac{1}{2a} \leqq x \leqq \frac{1}{a}$ ist $B(x) = - D(x)$ streng monoton fallend.

Im Intervall $x \geqq \frac{1}{a}$ ist $B(x) = D(x)$ streng monoton steigend.

Hieraus folgt weiter:

(1) Ist $2 \leqq \frac{1}{2a}$, so ist $B(2)$ der größte Funktionswert von B im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ (Abb. L 11/12;6.2.1.)

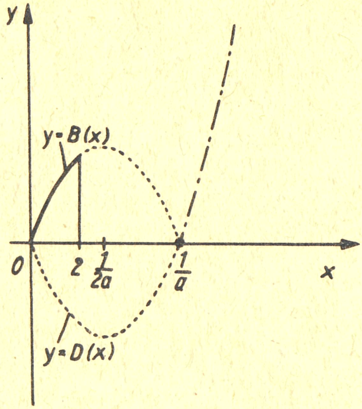
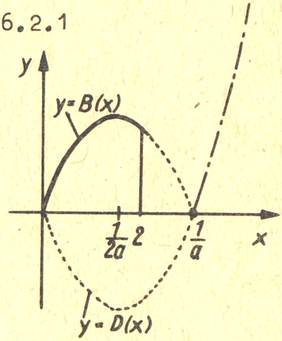


Abb. L 11/12;6.2.1



(2) Ist $\frac{1}{2a} \leqq 2 \leqq \frac{1}{a}$, so ist $B(\frac{1}{2a})$ der größte Funktionswert von B im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$ (Abb. L 11/12;6.2.2.)

Abb. L 11/12;6.2.2.

(3) Ist $2 \geqq \frac{1}{a}$, so ist die größere der Zahlen $B(\frac{1}{2a})$, $B(2)$ der größte Funktionswert von B im Intervall $0 \leqq x \leqq 2$. (Abb. L 11/12;6.2.3.)

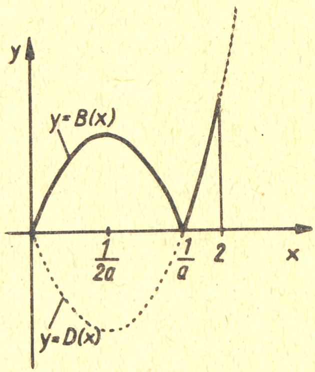


Abb. L 11/12;6.2.3

Im Falle $2 \leqq \frac{1}{a}$ ist nun $B(2) = -D(2) = -4a + 2$,
im Falle $2 \geqq \frac{1}{a}$ aber $B(2) = D(2) = 4a - 2$,
ferner ist in jedem Falle $B(\frac{1}{2a}) = -D(\frac{1}{2a}) = \frac{1}{4a}$.

Im Falle $2 \gtreqqless \frac{1}{a}$ gilt daher je eine der Beziehungen

(4) $\quad B(\frac{1}{2a}) \gtreqqless B(2)$

genau dann, wenn (außer $2 \geqq \frac{1}{a}$) die entsprechende unter den Beziehungen

$$\frac{1}{4a} \gtreqqless 4a - 2$$

oder, der Reihe nach hiermit äquivalent,

$$0 \gtreqqless a^2 - \frac{a}{2} - \frac{1}{16} ,$$

$$0 \gtreqqless (a - \frac{1}{4} (1 + \sqrt{2}))\cdot(a - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{2}))$$

gilt. Beachtet man nun noch, daß wegen $\sqrt{2} > 1$

$$\frac{1}{4} (1 + \sqrt{2}) > \frac{1}{2}$$

und $\quad a - \frac{1}{4}(1-\sqrt{2}) > 0$

ist, so ergibt sich aus (1), (2), (3) und der Untersuchung von (4) insgesamt:

(1') Ist $a \leqq \frac{1}{4}$, so hat der "Abstand" von f und g den Wert $- 4a + 2$.

(2') Ist $\frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$, so hat der "Abstand" von f und g den Wert $\frac{1}{4a}$.

($3'_1$) Ist $\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{4} (1 + \sqrt{2})$, so ist $B(\frac{1}{2}) \geqq B(2)$, also hat der "Abstand" von f und g den Wert $\frac{1}{4a}$.

($3'_2$) Ist $a \geqq \frac{1}{4} (1 + \sqrt{2})$, so ist $B(\frac{1}{2a}) \leqq B(2)$, also hat der "Abstand" von f und g den Wert $4a - 2$.

Damit ist der Abstand von f und g als Funktion A der Variablen a im Intervall $a > 0$ dargestellt, und diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

Im Intervall $0 > a \leqq \frac{1}{4}$ ist $A(a) = -4a + 2$ streng monoton fallend.

Im Intervall $\frac{1}{4} \leqq a \leqq \frac{1}{4}\cdot(1 + \sqrt{2})$ ist $A(a) = \frac{1}{4a}$ streng monoton fallend.

Im Intervall $a \geqq \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})$ ist $A(a) = 4a - 2$ streng monoton steigend.

(Abb. L 11/12;6.2.4.) Daher gibt es einen und nur einen Wert a, für den der Abstand zwischen f und g möglichst klein ist, nämlich den Wert
$a = \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})$.

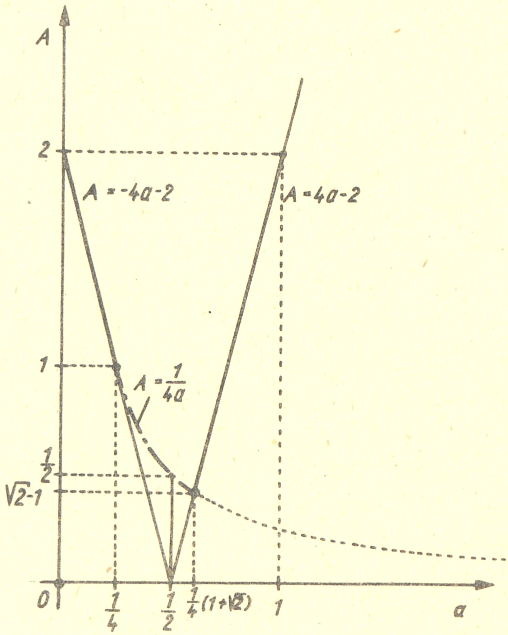


Abb. L 11/12;6.2.4