A 11/12; I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/III/1) Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leqq 90^{\circ}$.

a) Es ist zu beweisen:
Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d.h. sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent); deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.

b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

11/12/III/2) Man beweise, daß die Gleichung

(1) $4^x + 6^x = 9^x$

keine rationalen Lösungen besitzt.

11/12/III/3) 21 leere Felder, die in Form eines Rechtecks von 3 Zeilen und 7 Spalten wie in der Abb. A 11/12;3 angeordnet sind, sollen so mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belegt werden, daß jedes Feld mit genau einer der angegebenen Zahlen belegt wird und dabei insgesamt jede dieser Zahlen dreimal vorkommt. Dabei sollen die drei Zahlen jeder Spalte paarweise voneinander verschieden sein, und von den sechs Zahlen in je zwei Spalten dürfen höchstens zwei übereinstimmen.

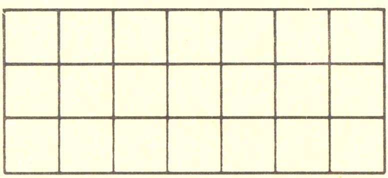

Abb. A 11/12; 3

Man gebe eine Belegung der geforderten Art an und begründe, wie sich eine derartige Belegung finden läßt.

30 05 13 - 1

A 11/12;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/III/4)

a) Es seien $a_0 = -4$ und $a_1 = 2$ die ersten beiden Glieder einer unendlichen Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ das arithmetische Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Man zeige, daß die so definierte Folge $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist, und berechne für sie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Es seien a_0 und a_1 die ersten beiden Glieder einer Folge $\{a_n\}$. Ferner sei a_n für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden Glieder.
Geben Sie in Form von Relationen zwischen a_0 und a_1 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist!

11/12/III/5) Es ist zu beweisen, daß

$$\frac{1}{1-\sin 2x} + \frac{1}{1-\sin 2y} \geq \frac{2}{1-\sin(x+y)} \qquad (1)$$

für alle reellen Zahlenpaare (x,y) mit

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad 0 < y < \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

erfüllt ist.
Ferner ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür anzugeben, daß in (1) unter der Nebenbedingung (2) Gleichheit eintritt.

30 05 13 - 1

A 11/12;II

Von den folgenden beiden Aufgaben 11/12/III/6.1 und 11/12/III/6.2 ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

11/12/III/6.1) Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen u, v, w, ... heißt eine Gruppe bezüglich einer Operation A, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(I) Jedem geordneten Paar (u,v) von Elementen aus $\mathfrak{M}$ ist vermöge der Operation A genau ein Element w aus $\mathfrak{M}$ zugeordnet (man schreibt $u \circ v = w$).

(II) Die Operation A ist assoziativ, d.h., für alle Elemente u, v, w aus $\mathfrak{M}$ gilt:

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w).$$

(III) Zu je zwei Elementen u und v aus $\mathfrak{M}$ existiert mindestens ein Element x aus $\mathfrak{M}$, so daß $u \circ x = v$ gilt, und mindestens ein Element y aus $\mathfrak{M}$, so daß $y \circ u = v$ gilt.

Es sei nun $\mathfrak{K}$ die Menge aller geordneten Paare (a,b) reeller Zahlen a und b, für die $a^2 + b^2 = 1$ gilt. Ferner sei in $\mathfrak{K}$ eine Operation A wie folgt definiert:

$(a,b) \circ (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$.

Man beweise, daß $\mathfrak{K}$ eine Gruppe bezüglich A ist.

11/12/III/6.2) 50 weiße und 50 schwarze Kugeln sind so in zwei äußerlich nicht unterscheidbare Urnen zu verteilen, daß keine Urne leer bleibt und alle Kugeln verwendet werden. Wie ist die Aufteilung der Kugeln auf die beiden Urnen vorzunehmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, beim (blindlings erfolgenden) einmaligen Wählen einer der beiden Urnen und Ziehen einer Kugel aus ihr eine weiße Kugel zu ergreifen, so groß wie möglich ausfallen soll?

<u>Hinweise zur Lösung</u>:

a) In der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses als Quotient aus der Anzahl g der für dieses Ereignis "günstigen" Fälle und der Gesamtzahl m aller möglichen Fälle definiert, also
$p = \frac{g}{m}$ gesetzt.

b) Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, aus einer Urne, die insgesamt u Kugeln und darunter w weiße enthält, (blindlings) eine weiße Kugel zu ziehen, als $p = \frac{w}{u}$ anzusetzen.

c) Sind zwei Urnen vorhanden, bei denen die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen einer weißen Kugel p_1 bzw. p_2 betragen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis: "Auswahl einer der beiden Urnen und Ziehen einer weißen Kugel aus der gewählten Urne" zu:
$p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.

L 11/12;I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

11/12/III/1) **Lösung:** 4 Punkte

a) Es sei O der Schnittpunkt von g und h; ferner sei s eine durch O begrenzte Halbgerade von g sowie t eine von O begrenzte Halbgerade von h derart, daß s und t die Schenkel eines Winkels der Größe α sind. In der Ebene sei eine Orientierung der Winkel zwischen je zwei von O ausgehenden Strecken bzw. Strahlen so gegeben, daß t mit s auch bei dieser Orientierung einen Winkel der (positiven) Größe α bildet.

Es sei nun P ein Punkt der Ebene. Die Strecke OP habe die Länge r und bilde mit s einen Winkel der Größe φ

Wird P an g gespiegelt, so ergibt sich als Bildpunkt derjenige Punkt Q der Ebene, für den die Strecke OQ die Länge r hat und mit s einen Winkel der Größe $(-\varphi)$ bildet. Die Strecke OQ bildet dann mit t einen Winkel der Größe $(-\varphi-\alpha)$.

Wird Q an h gespiegelt, so ergibt sich folglich als Bildpunkt derjenige Punkt R der Ebene, für den die Strecke OR die Länge

(1) $\overline{OR} = r$

hat und mit t einen Winkel der Größe

$(-(-\varphi-\alpha)) = \varphi+\alpha$ bildet.

Die Strecke OR bildet daher mit s einen Winkel der Größe

(2) $(\varphi+\alpha)+\alpha = \varphi + 2\alpha$.

In den durch (1), (2) charakterisierten Punkt R geht P aber auch bei der Drehung um den Drehpunkt O mit dem Drehwinkel der Größe 2α über.

3 Punkte

b) Die Strecke OP bildet mit t einen Winkel der Größe $\varphi-\alpha$.

Wird P an h gespiegelt, so ergibt sich daher als Bildpunkt derjenige Punkt S, für den die Strecke OS die Länge r hat und mit t einen Winkel der Größe $(-(\varphi-\alpha)) = -\varphi+\alpha$ bildet.

Die Strecke OS bildet dann mit s einen Winkel der Größe
$(-\varphi + \alpha) + \alpha = -\varphi + 2\alpha$.
Wird S an g gespiegelt, so ergibt sich folglich als Bildpunkt derjenige Punkt T, für den die Strecke OT die Länge
(3) $\overline{OT} = r$
hat und mit s einen Winkel der Größe
(4) $-(-\varphi + 2\alpha) = \varphi - 2\alpha$ bildet.
In den durch (3), (4) charakterisierten Punkt T geht P auch bei der Drehung um den Drehpunkt O mit dem Drehwinkel der Größe (-2α) über.
Diese Drehung stimmt für $\alpha = 90^\circ$ mit der in a) gefundenen Drehung überein, für $\alpha < 90^\circ$ dagegen nicht.
<u>Bemerkung</u>:
Führt man keine orientierten Winkel ein, so müssen mehrere Fallunterscheidungen durchgeführt werden.

Zusammen 7 Punkte

11/12/III/2) <u>Lösung</u>: 7 Punkte
Angenommen, es gäbe eine rationale Lösung x von (1). Dann folgt
$(2 \cdot 2)^x + (2 \cdot 3)^x = (3 \cdot 3)^x$, also nach Division durch $(2 \cdot 2)^x$ $(\neq 0)$
$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}.$$
Setzt man nun $\left(\frac{3}{2}\right)^x = z$, so ergibt sich
$z^2 - z - 1 = 0$ (2).
Die Gleichung (2) hat genau die reellen Lösungen
$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
Von diesen ist nur $z_1 > 0$.
Somit folgt weiter
(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Es sei nun $x = \frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q. Wegen $z_1 > 1$, also $x > 0$ kann dann $p > 0$ und $q > 0$ angenommen werden.
Aus (3) folgt weiter

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ also}$$

$$(4) \qquad 3^p = 2^{p-q}\,(1+\sqrt{5}\,)^q.$$

Unter Benutzung des binomischen Satzes ergibt sich
$(1+\sqrt{5}\,)^q = a + b\sqrt{5}$ mit positiven ganzen Zahlen a und b. Aus (4) folgt schließlich

$$\sqrt{5} = \frac{3^p \cdot 2^{q-p} - a}{b}.$$

Diese Gleichung enthält den Widerspruch, daß $\sqrt{5}$ als eine rationale Zahl dargestellt wird. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme, es gäbe eine rationale Lösung von (1), falsch war.

11/12/III/3) <u>Lösung</u>: 5 Punkte

Offenbar ist

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7	6	7	7	6

eine Lösung. Man kann sie z.B. auf folgende Weise finden:
Unter Berücksichtigung der in der Aufgabenstellung genannten Bedingungen muß insbesondere die Zahl 1 in drei verschiedenen Spalten stehen, kann also in die ersten drei eingetragen werden:

1	1	1				

Weiterhin müssen lauter verschiedene Zahlen in den ersten drei Spalten vorkommen, weil je zwei von ihnen bereits die gemeinsame Zahl 1 besitzen. Dafür können der Reihe nach die Zahlenpaare 2 und 3, 4 und 5, 6 und 7 gewählt werden:

L 11/12;I

1	1	1				
2	4	6				
3	5	7				

Die bereits in der ersten Spalte auftretende Zahl 2 muß noch in zwei weiteren Spalten stehen, kann also in die vierte und fünfte Spalte gesetzt werden.
Ähnlich muß die Zahl 3, die auch schon in der ersten Spalte vorkommt, noch in zwei weiteren Spalten stehen, kann aber weder in die vierte noch in die fünfte eingesetzt werden, weil das mit dem Vorhandensein von 2 und 3 in der ersten Spalte unverträglich wäre, so daß sich für die 3 zwangsläufig die sechste und siebente Spalte ergeben:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6				
3	5	7				

Weiterhin kann die Zahl 4, die schon in der zweiten Spalte steht, in die vierte und sechste Spalte aufgenommen werden, während ihr gleichzeitiges Auftreten in der vierten und fünften, bzw. sechsten und siebenten Spalte unmöglich ist, weil sonst in diesen beiden Spaltenpaaren mehr als eine Zahl übereinstimmen würde. Die Zahl 5 kann dann weder in der vierten noch in der sechsten Spalte stehen, beidemal weil sie bereits in der zweiten Spalte zusammen mit der 4 steht. Sie muß also in die fünfte und siebente Spalte eingetragen werden:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6	4	5	4	5
3	5	7				

Danach kann die Zahl 6 in der vierten Spalte und muß dann in der siebenten Spalte Platz finden. Die beiden für die Zahl 7 verbleibenden Plätze in der fünften und sechsten Spalte ergeben keinen Widerspruch, so daß damit eine Lösung gefunden ist.

/1

L 11/12;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

11/12/III/4) Lösung:

a) Für jede geometrische Folge $a_n = a_o q^n$ mit dem Quotienten $q = -\frac{1}{2}$ gilt 3 Punkte

$$a_{n+2} = a_o \cdot (-\tfrac{1}{2})^{n+2} = a_o \cdot (-\tfrac{1}{2})^n \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} (a_o (-\tfrac{1}{2})^n + a_o (-\tfrac{1}{2})^{n+1})$$

$$= \tfrac{1}{2} (a_n + a_{n+1}).$$

Darüber hinaus reicht sogar die ($a_1 = a_o q$ mit $q = -\frac{1}{2}$ erfüllende) Vorgabe der Anfangsglieder a_o, a_1 und die Forderung von $a_{n+2} = \frac{1}{2} (a_n + a_{n+1})$ für $n = 0,1,2, \ldots$ aus, um alle Glieder der Folge eindeutig festzulegen. Für die in der Aufgabenstellung gegebene Folge $\{a_n\}$ sind nun alle diese Bedingungen erfüllt, also stimmt sie mit einer geometrischen Folge vom Quotienten $q = -\frac{1}{2}$ überein. Damit ist $\{a_n\}$ als geometrische Folge mit dem Anfangsglied (-4) und dem Quotienten $(-\frac{1}{2})$ nachgewiesen. Die Summe der zugehörigen unendlichen Reihe beträgt somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{-4}{1 - (-\frac{1}{2})} = -\frac{8}{3}.$$

b) Angenommen, a_o und a_1 seien so beschaffen, daß das in der Aufgabenstellung genannte Bildungsgesetz auf eine geometrische Folge $\{a_n\}$ führt, d.h. daß mit einer geeigneten Zahl q für n = 1, 2, 3, ... die Gleichung $a_n = a_o \cdot q^n$ gilt. 3 Punkte

Ist $a_o = 0$, so folgt $a_1 = 0 \cdot q = 0$.

Ist $a_o \neq 0$, so folgt $a_o q^2 = a_2 = \frac{1}{2} (a_o + a_1)$

$$= \tfrac{1}{2} (a_o + a_o q)$$

und hieraus $q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0$, also
entweder $q = 1$, wegen $a_1 = a_oq$ also

(1) $a_1 = a_o$,

oder $q = -\frac{1}{2}$, wegen $a_1 = a_oq$ also

(2) $2a_1 + a_o = 0$.

Da man nachträglich bestätigt, daß im Fall $a_o = a_1 = 0$ sowohl (1) als auch (2) gilt, ergibt sich:
Es kann nur dann eine geometrische Folge entstehen, wenn a_o und a_1 (mindestens) eine der Bedingungen (1), (2) erfüllen.

Beweis, daß jede dieser Bedingungen auch hinreichend ist:
Gilt (1) oder (2), so gilt $a_1 = a_oq$ mit $q = 1$
oder mit $q = -\frac{1}{2}$, also jedenfalls mit $q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0$, und
somit $a_oq^{n+2} = \frac{1}{2}(a_oq^n + a_oq^{n+1})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.
Wie bei a) folgt daraus die Übereinstimmung der Folge $\{a_n\}$ mit einer geometrischen Folge.
Notwendig und hinreichend dafür, daß $\{a_n\}$ eine geometrische Folge ist, ist also, daß eine der beiden Gleichungen (1) oder (2) erfüllt ist.

Zusammen 6 Punkte

11/12/III/5) <u>Lösung:</u> 7 Punkte

Für alle reellen Zahlenpaare (x,y) mit der Bedingung (2) gilt:

$$1 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x$$
$$= (\cos x - \sin x)^2 \qquad (3)$$

sowie

$$1 - \sin 2y = \sin^2 y + \cos^2 y - 2\sin y\cos y$$
$$= (\cos y - \sin y)^2; \qquad (4)$$

wegen (2) gilt dabei
$\cos x - \sin x > 0$ und $\cos y - \sin y > 0$.
Ferner gilt für alle positiven reellen Zahlenpaare (a,b)
$a^2 + b^2 \geqq 2ab$.

Setzt man hierein $a = \frac{1}{\cos x - \sin x}$, $b = \frac{1}{\cos y - \sin y}$,
so folgt für alle reellen Zahlenpaare (x,y) mit (2) wegen (3) und (4)

$$\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} \geqq \frac{2}{(\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y)},$$

$$\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} \geqq \frac{2}{\cos x\cos y - \sin x\cos y - \cos x\sin y + \sin x\sin y},$$

$$\frac{1}{1 - \sin 2x} + \frac{1}{1 - \sin 2y} \geqq \frac{2}{\cos(x-y) - \sin(x+y)} \geqq \frac{2}{1 - \sin(x+y)},$$

weil wegen (2)

$$0 < (\cos x - \sin x)(\cos y - \sin y) = \cos(x-y) - \sin(x+y) \leqq 1 - \sin(x+y) \quad (5)$$

gilt.
Damit ist die Behauptung bewiesen.
Notwendig dafür, daß Gleichheit in (1) eintritt, ist, daß auch in (5) Gleichheit eintritt, also muß $\cos(x-y) = 1$ gelten. Das gilt wegen (2) nur für $x = y$.
Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie man durch Einsetzen von $x = y$ in beide Seiten von (1) erkennt.

11/12/III/6.1) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

(I) Es seien $u = (a,b)$ und $v = (c,d)$ mit $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$ (1)
zwei Elemente aus $\mathfrak{K}$. Dann ist ihnen vermöge der Operation A das geordnete Paar

$$w = (ac - bd,\ ad + bc) = u \circ v \quad (2)$$

zugeordnet. Ferner gilt wegen (1)

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2$$
$$= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1 \quad (3)$$

d.h. w ist ebenfalls Element der Menge .
Die Bedingung (I) ist also erfüllt.

(II) Für drei beliebige Elemente (a,b), (c,d), (f,g) aus $\mathfrak{K}$ gilt

$$\begin{aligned}((a,b) \circ (c,d)) \circ (f,g) &= (ac - bd,\ ad + bc) \circ (f,g) \\ &= ((ac - bd)f - (ad + bc)g, \\ &\quad (ac - bd)g + (ad + bc)f) \\ &= (acf - bdf - adg - bcg, \\ &\quad acg - bdg + adf + bcf). \qquad (4)\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}&(a,b) \circ ((c,d) \circ (f,g)) = (a,b) \circ (cf - dg,\ cg + df) \\ &= (a(cf - dg) - b(cg + df), a(cg + df) + b(cf - dg)) \\ &= (acf - adg - bcg - bdf,\ acg + adf + bcf - bdg). \qquad (5)\end{aligned}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$((a,b) \circ (c,d)) \circ (f,g) = (a,b) \circ ((c,d) \circ (f,g)),$$

d.h., die definierte Operation ist assoziativ, die Bedingung (II) ist erfüllt.

(III) Es seien (a,b) und (c,d) zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{K}$.

[Wir nehmen zunächst an, daß ein Element (x,y) in $\mathfrak{K}$ existiert, so daß

$(a,b) \circ (x,y) = (c,d)$ gilt. (6)

Dann folgt

$(ax - by,\ ay + bx) = (c,d)$,

also $ax - by = c$ (7)

und $ay + bx = d$. (8)

Hieraus folgt weiter

$a^2x - aby = ac$,

$b^2x + aby = bd$,

also

$x(a^2 + b^2) = ac + bd$ und hieraus wegen

$a^2 + b^2 = 1$

$x = ac + bd.$ (9)

Analog erhält man

$y = ad - bc.$ (10)]

Setzt man nun die für x und y ermittelten[1] Werte aus (9) und (10) in (6) ein, so erkennt man, daß die Gleichung (6) erfüllt ist, d.h. diese Gleichung ist stets lösbar.
Nun gilt für beliebige Elemente (a,b), (c,d) aus $\mathfrak{K}$

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc) = (ca - db,\ cb + da)$$
$$= (c,d) \circ (a,b),$$

d.h., die definierte Operation ist kommutativ, und die Gleichung $(x,y) \circ (a,b) = (c,d)$ ist ebenfalls lösbar, sie hat nämlich dieselbe Lösung wie die Gleichung (6).
Daher ist auch die Bedingung (III) erfüllt.
Weil die Bedingungen (I), (II) und (III) erfüllt sind, ist also die Menge $\mathfrak{K}$ eine Gruppe bezüglich der Operation A.

Bemerkung:
In der obigen Aufgabe wurden die komplexen Zahlen a + bi mit dem Betrag 1 als Paare reeller Zahlen a, b mit $a^2 + b^2 = 1$ eingeführt, und es war nachzuweisen, daß die Menge $\mathfrak{K}$ dieser komplexen Zahlen mit der Multiplikation als Operation eine Gruppe darstellt.

11/12/III/6.2) Lösung: 8 Punkte

Legt man in die erste Urne insgesamt u Kugeln und darunter w weiße, so sind in der zweiten Urne insgesamt (100-u) Kugeln und darunter (50-w) weiße unterzubringen, weil alle Kugeln verwendet werden müssen. Für u und w gelten die Bedingungen

$0 \leqq w \leqq u$ und $0 \leqq (50-w) \leqq (100-u)$

sowie die Bedingung

$1 \leqq u \leqq 99$, die zum Ausdruck bringt, daß keine Urne leer bleiben darf.

Diese Bedingungen lassen sich gleichwertig in der Form

$1 \leqq u \leqq 99;\ 0 \leqq w \leqq 50;\ (u - 50) \leqq w \leqq u$

schreiben.

[1] Für eine vollständige Lösung genügt die bloße Angabe von (9) und (10) mit dem folgenden Text ohne vorangehende Herleitung.

Aus den Hinweisen folgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit p für das Ziehen einer weißen Kugel aus einer der beiden Urnen zu

(1) $p = p(w,u) = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{u} + \frac{50-w}{100-u}\right)$,

und es sind diejenigen unter den zugelassenen Werten von w und u zu ermitteln, für welche p den größten Wert p_{max} annimmt. Die Form des Ausdrucks (1) legt es nahe, in zwei Schritten vorzugehen:

a) Zunächst wird für festes u dasjenige w ermittelt, das für dieses u den größten Wert von p liefert;

b) Danach wird aus den 99 so erhaltenen Werten von p der größte herausgesucht.

Teil a:

Bei festem u ändert sich p (w,u) beim Übergang von w zu w + 1 in

$p(w+1, u) = \frac{w+1}{u} + \frac{50-w-1}{100-u}$, und es gilt

$p(w+1, u) - p(w,u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{100-u} = \frac{2(50-u)}{u(100-u)}$.

Somit wird p(w,u) beim Übergang von w zu w+1 größer für $u < 50$, kleiner für $u > 50$ und bleibt konstant für $u = 50$.

Letzterer Fall ($u = 50$) ergibt aus (1) den Wert

$p(w,50) = \frac{1}{2}\left(\frac{w}{50} + \frac{50-w}{50}\right) = \frac{1}{2}$

(in Übereinstimmung mit der auch ohne Rechnung einleuchtenden Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit stets gleich $\frac{1}{2}$ ist, wenn man in jede Urne 50 Kugeln legt, wobei es auf die Verteilung der weißen Kugeln gar nicht ankommt).

Im zweiten Fall ($51 \leq u \leq 99$) ist obiger Überlegung gemäß für w der kleinste zulässige Wert, also $w = u - 50$, einzusetzen. Für alle diese u erhält man somit den jeweils größten Wert von p in der Form

(2) $p(u-50,u) = \frac{1}{2}\left(\frac{u-50}{u} + 1\right) = 1 - \frac{25}{u}$.

<u>Im ersten Fall</u> ($1 \leqq u \leqq 49$) ist es umgekehrt erforderlich, für w den größten zulässigen Wert, also $w = u$, einzusetzen. Für jedes u erhält man hier den jeweils größten Wert von p in der Form

(3) $p(u,u) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{50-u}{100-u}\right) = 1 - \frac{25}{100-u}$.

<u>Teil b</u>:

Nunmehr ist p_{max} aus den größten Werten von $p(u,u)$, ($1 \leqq u \leqq 49$) in (3), $p\,(w,50) = \frac{1}{2}$ sowie $p(u - 50,\ u)$, ($51 \leqq u \leqq 99$) in (2) herauszusuchen. Man braucht übrigens nur den Ausdruck für p in (2) heranzuziehen und darin, anders als bisher, $u = 50$ zuzulassen; denn bei Ersetzung von u durch 100-u (was der Vertauschung der Urnen entspricht) geht er in den p-Ausdruck in (3) über, und für $u = 50$ nimmt er den Wert $\frac{1}{2}$ an.

Wie (2) zeigt, nimmt $p(u - 50,\ u)$ bei wachsendem u ständig zu, hat also den größten Wert für $u = 99$, und dieser beträgt $p(49,99) = p_{max} = \frac{74}{99}$.

(Man kann noch bemerken, daß entsprechend aus (3)

$$p\,(1,1) = p_{max} = \frac{74}{99}$$

gefunden werden kann, wodurch noch einmal die Urnenvertauschung verdeutlicht wird.)

Damit ist die Aufgabe gelöst:

Es ist $p_{max} = \frac{74}{99}$ (fast $\frac{3}{4}$), wenn man in eine der beiden Urnen nur eine weiße Kugel und in die andere alle übrigen 99 Kugeln legt.