A 11/12 XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 11/12

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/II/1) Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b. Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.

a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.

b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

11/12/II/2) Beweisen Sie, daß für keine ganze Zahl n die Zahl $7n + 3$ Quadrat einer ganzen Zahl sein kann!

11/12/II/3) Klaus bemerkt, daß die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von 110° bilden.
Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

11/12/II/4) Man betrachte in einer mit einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem versehenen Ebene die Schar aller konzentrischen Kreise um den Mittelpunkt $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.
Es ist zu beweisen, daß keine Kreislinie dieser Schar mehr als einen Punkt (x,y) mit rationalen Zahlen x, y als Koordinaten enthält.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
<u>Lösungen und Punktbewertung</u>
Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe

11/12/II/1) **Lösung:**

a) Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge c ist, hat genau dann die geforderte Höhenlänge, wenn diese $a + b$ beträgt. Ist dies der Fall, so hat sein Volumen $(a + b)c^2$ genau dann den geforderten Wert, wenn $(a + b) \cdot c^2 = a^3 + b^3$ oder, äquivalent hiermit $c^2 = a^2 - ab + b^2$ gilt. — 7 Punkte

Wegen $a^2 - ab + b^2 = \dfrac{a^3 + b^3}{a + b} > 0$ ist dies genau für

$$c = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

der Fall.

b) Eine Strecke der Länge c erhält man z. B. als Seite AB eines Dreiecks — 3 Punkte

$\triangle ABC$ mit $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{\measuredangle ACB} = 60^\circ$.

Nach dem Kosinussatz gilt nämlich für dieses Dreieck, das sich nach (sws) stets eindeutig konstruieren läßt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$
$$= a^2 + b^2 - ab.$$

insgesamt 10 Punkte

11/12/II/2) Lösung: 8 Punkte

Jede ganze Zahl läßt sich in genau einer der Formen $7m$, $7m \pm 1$, $7m \pm 2$ oder $7m \pm 3$ (m ganze Zahl) darstellen.

Die Quadrate davon sind:

$$(7m)^2 = 7 \cdot (7m^2) + 0,$$
$$(7m \pm 1)^2 = 7 \cdot (7m^2 \pm 2m) + 1,$$
$$(7m \pm 2)^2 = 7 \cdot (7m^2 \pm 4m) + 4,$$
$$(7m \pm 3)^2 = 7 \cdot (7m^2 \pm 6m+1) + 2.$$

Die Quadrate ganzer Zahlen lassen sich demnach nur in einer der Formen $7n$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$ (n ganze Zahl) darstellen. Daher kann eine Zahl der Form $7n + 3$ nicht das Quadrat einer ganzen Zahl sein.

Anderer Lösungsweg:

Für jede ganze Zahl z gilt genau eine der Kongruenzen:

$$z \equiv 0 \pmod 7,$$
$$z \equiv \pm 1 \pmod 7,$$
$$z \equiv \pm 2 \pmod 7,$$
$$z \equiv \pm 3 \pmod 7.$$

Daher gilt für z^2 genau eine der folgenden Kongruenzen:

$$z^2 \equiv 0 \pmod 7,$$
$$z^2 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$z^2 \equiv 4 \pmod 7,$$
$$z^2 \equiv 2 \pmod 7.$$

Also gilt für z^2 niemals $z^2 \equiv 3 \bmod 7$. Folglich kann eine Zahl der Form $7n + 3$ niemals Quadrat einer ganzen Zahl sein.

11/12/II/3) **Lösung:** 10 Punkte

Der große Zeiger der Taschenuhr führt in der Zeit von 0 Uhr bis t Uhr (t in Stunden) eine Drehung der Größe $\alpha_g = t \cdot 360^\circ$ aus.

Der kleine Zeiger führt in dieser Zeit eine gleichsinnige Drehung der Größe

$\alpha_k = t \cdot 30^\circ$ aus.

Die beiden Zeiger bilden folglich um t Uhr einen Winkel mit der Eigenschaft, daß entweder seine Größe oder der zu ihr entgegengesetzte Wert sich von

$$\alpha_g - \alpha_k = t \cdot 330^\circ$$

um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° unterscheidet.

Die beiden in der Aufgabe genannten Zeitpunkte, t_1 Uhr, t_2 Uhr, sind daher charakterisiert durch $6 < t_i < 7$ $(i = 1, 2)$ sowie die Existenz je einer ganzen Zahl n_i $(i = 1, 2)$ mit

$$t_1 \cdot 330^\circ = n_1 \cdot 360^\circ + 110^\circ,$$

$$t_2 \cdot 330^\circ = n_2 \cdot 360^\circ - 110^\circ.$$

Hieraus folgt

$$\frac{6 \cdot 330 - 110}{360} < n_1 < \frac{7 \cdot 330 - 110}{360},$$

also

$$5 < \frac{187}{36} < n_1 < \frac{220}{36} < 7 \text{ und daher } n_1 = 6,$$

$$t_1 = \frac{6 \cdot 360 + 110}{330} = \frac{227}{33}.$$

Ferner folgt

$$\frac{6 \cdot 330 + 110}{360} < n_2 < \frac{7 \cdot 330 + 110}{360}, \text{ also}$$

$$5 < \frac{209}{36} < n_2 < \frac{242}{36} < 7 \quad \text{und daher}$$

$n_2 = 6,$

$$t_2 = \frac{6 \cdot 360 - 110}{330} = \frac{205}{33}$$

und damit $t_1 - t_2 = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$.

Zwischen den beiden Zeitpunkten sind also genau 40 Minuten verstrichen.

Anderer Lösungsweg:

Um 6 Uhr ist der Minutenzeiger um genau 180° hinter dem Stundenzeiger zurück. Zwischen 6 und 7 Uhr überholt er ihn genau 1 mal und ist ihm um 7 Uhr genau um 150° voraus. Da sich beide Zeiger gleichförmig bewegen, verringert sich von 6 Uhr bis zum Überholen der (Winkel-) Abstand zwischen ihnen gleichförmig, um sich sodann mit derselben (Winkel-) Geschwindigkeit bis 7 Uhr wieder zu vergrößern. Diese Geschwindigkeit ist demnach so groß, daß sie in 60 min eine Änderung von $180^\circ + 150^\circ = 330^\circ$ verursacht.
Gesucht ist nun die für eine Änderung von 220° erforderliche Zeit (nämlich die Zeit von einem Rückstand von 110° bis zu einem Vorsprung von 110° des Minutenzeigers gegenüber dem Stundenzeiger).
Wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen beider Zeiger beträgt diese Zeit

$$\frac{220}{330} \cdot 60 \text{ min} = 40 \text{ min}.$$

11/12/II/4) Lösung: 12 Punkte

Es seien x, y, u, v rationale Zahlen so, daß der Punkt P (x,y) und der Punkt Q (u,v) auf derselben Kreislinie der Schar liegen.
Zu zeigen ist dann P = Q, d. h. x = u und y = v.
Hierzu sei der Radius des genannten Kreises mit r bezeichnet. Dann gelten die Gleichungen

$r^2 = (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2$ und

$r^2 = (u-\sqrt{2})^2 + (v-\sqrt{3})^2$ und

damit auch die Gleichung

$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (u-\sqrt{2})^2 + (v-\sqrt{3})^2.$

Nach einer einfachen Umformung erhält man dann

$x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 2(x-u)\sqrt{2} + 2(y-v)\sqrt{3}.$

Nach Voraussetzung ist die linke Seite dieser Gleichung eine rationale Zahl ϱ.

Ebenso sind $c = 2(x-u)$ und $d = 2(y-v)$ rational.

Aus $c\sqrt{2} + d\sqrt{3} = \varrho$ folgt

(1) $2c^2 + 3d^2 + 2cd\sqrt{6} = \varrho^2.$

Da $\sqrt{6}$ keine rationale Zahl ist, kann (1) nur für $cd = 0$ erfüllt sein.

Somit ist entweder $c = 0$ und damit $3d^2 = \varrho^2$ bzw. $d\sqrt{3} = \varrho$, woraus $d = 0$ folgt, oder $d = 0$ und damit $2c^2 = \varrho^2$ bzw. $c\sqrt{2} = \varrho$, woraus $c = 0$ folgt.

Damit hat sich in beiden Fällen $c = d = 0$ ergeben. Das besagt aber $x = u$ und $y = v$, w.z.b.w.