Rotschulz

A 10;I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.
Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/IV/1)

a) Man beweise den folgenden Satz:
Ist die Summe dreier Primzahlen, von denen jede größer als 3 ist, durch 3 teilbar, dann sind alle Differenzen je zweier dieser Primzahlen durch 6 teilbar.

b) Man beweise, daß die Behauptung des Satzes nicht immer wahr ist, wenn die Einschränkung, daß jede der Primzahlen größer als 3 ist, fallengelassen wird.

10/IV/2) Es sind alle geordneten Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) positiver ganzer Zahlen zu ermitteln, die die folgenden Eigenschaften haben:

(1) Das Produkt dieser vier Zahlen ist gleich 82 944 000 000.

(2) Ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist gleich 24.

(3) Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) ist gleich 120 000.

(4) Der größte gemeinsame Teiler von x_1 und x_2 ist gleich 1200.

(5) Das kleinste gemeinsame Vielfache von x_2 und x_3 ist gleich 30 000.

30 05 14-1 (588)

Von den nachstehenden Aufgaben 10/IV/3.1. und 10/IV/3.2. ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

10/IV/3.1.) Es sei ABCD ein konvexes Drachenviereck mit $\overline{AB} = \overline{AD} > \overline{BC} = \overline{CD}$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{FB}$ gilt.

Schließlich sei E derjenige im Inneren von ABCD gelegene Punkt, für den $\overline{EC} = \overline{BC}$ ($= \overline{CD}$) und $\overline{FE} = \overline{FB}$ gilt.

Beweisen Sie, daß E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

10/IV/3.2.) Dirk erklärt Jürgen den Nutzen der Differentialrechnung an Hand der Lösung der folgenden Aufgabe:

Es sei ABCDE ein ebenes konvexes Fünfeck derart, daß A, B, C, E die Eckpunkte eines Rechtecks und C, D, E die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Als Flächeninhalt des Fünfecks ABCDE werde nun ein geeigneter Wert F vorgeschrieben.

Man ermittle, ob unter allen diesen Fünfecken eines von kleinstem Umfang u existiert. Ist das der Fall, so berechne man für alle derartigen Fünfecke minimalen Umfangs den Wert $a : b$, wobei $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ bedeutet.

Am nächsten Tage teilt Jürgen Dirk mit, daß er eine Lösung dieser Aufgabe ohne Verwendung der Differentialrechnung gefunden habe.

Man gebe eine Lösung an, die Jürgen gefunden haben könnte.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 — 2. Tag —

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.
Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/IV/4) Ermitteln Sie alle Tripel (m, x, y) aus einer reellen Zahl m, einer negativen ganzen Zahl x und einer positiven ganzen Zahl y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

(1) $-2x + 3y = 2m$

(2) $x - 5y = -11$.

10/IV/5) Gegeben seien ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrats verschiedener Punkt P.
Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2. Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D.
Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt.
Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, daß $EFGH$ ein Rechteck ist.
Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.
Ermitteln Sie $I_1 : I_2$!

10/IV/6) Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$.

Man beweise, daß dann

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = 1 \text{ gilt.}$$

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

10/IV/1) Lösung:

4 Punkte | a) Wenn die Summe dreier Primzahlen durch 3 teilbar ist, so gilt dasselbe für die Summe ihrer bei Division durch 3 auftretenden Reste.

Jede Primzahl, die größer als 3 ist, läßt bei der Division durch 3 einen der Reste 1, 2. Die einzigen durch 3 teilbaren Summen aus 3 Zahlen, die 1 oder 2 lauten, sind aber 3 und 6, und zwar können diese Summen nur so auftreten, daß alle drei Reste 1 bzw. alle drei Reste 2 lauten.
In beiden Fällen läßt die Differenz je zweier der betrachteten Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 0, ist also durch 3 teilbar. Da ferner jede Primzahl größer als 3 eine ungerade Zahl ist, sind alle betrachteten Differenzen gerade Zahlen, also durch 2 teilbar.

Daraus folgt wegen der Teilerfremdheit von 2 und 3, daß alle Differenzen durch 6 teilbar sind.

2 Punkte | b) Es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels: Die Summe der drei Primzahlen 3, 5, 7 ist durch 3 teilbar, aber die Differenz 5 - 3 ist nicht durch 6 teilbar.

insgesamt 6 Punkte

10/IV/2) Lösung:

6 Punkte | Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei ein Quadrupel mit den Eigenschaften (1) bis (5). Wegen (1) und $82\,944\,000\,000 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^6$ gilt dann

$x_1 = 2^{u_1} \cdot 3^{v_1} \cdot 5^{w_1}$, $x_2 = 2^{u_2} \cdot 3^{v_2} \cdot 5^{w_2}$,

$x_3 = 2^{u_3} \cdot 3^{v_3} \cdot 5^{w_3}$, $x_4 = 2^{u_4} \cdot 3^{v_4} \cdot 5^{w_4}$.

mit nichtnegativen ganzen Zahlen

u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Wegen (2) und $24 = 2^3 \cdot 3$ ist $v_i \geqq 1$, wegen (3) und $120\,000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^4$ aber $v_i \leqq 1$, also

(6) $v_i = 1$.

Aus (1) folgt $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 6$, aus (4) und $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ aber $w_1, w_2 \geqq 2$. Also gilt

(7) $w_3 \leqq 2$.

Nach (5) und $30\,000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ ist w_2 oder w_3 gleich 4, hiernach und nach (7) muß

(8) $w_2 = 4$ sein.

Aus $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 6$ folgt wegen (8) $w_1 + w_3 + w_4 = 2$. Wegen (4), also $w_1 \geqq 2$, ist dies nur für $w_1 = 2$, $w_3 = w_4 = 0$ möglich.

Wegen (4) ist $u_2 \geqq 4$, wegen (5) aber $u_2 \leqq 4$, also

(9) $u_2 = 4$.

Aus (1) folgt $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$, aus (4) und (2) aber $u_1, u_2 \geqq 4$ und $u_3 \geqq 3$. Also gilt

(10) $u_4 \leqq 5$.

Nach (3) ist eines der u_i gleich 6, nach (5) gilt aber $u_2, u_3 \leqq 4$; hiernach und nach (10) muß

(11) $u_1 = 6$ sein.

Aus $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16$ folgt wegen (9), (11) $u_3 + u_4 = 6$. Wegen (2), also $u_3, u_4 \geqq 3$, ist dies nur für $u_3 = u_4 = 3$ möglich.

Daher kann höchstens das Quadrupel aus

$$x_1 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4\,800$$
$$x_2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 = 30\,000$$
$$x_3 = 2^3 \cdot 3 = 24$$
$$x_4 = 2^3 \cdot 3 = 24$$

die Eigenschaften (1) bis (5) besitzen. Eine Probe zeigt, daß es diese tatsächlich hat.

10/IV/3.1) <u>Lösung:</u>

8 Punkte | Es ist $\triangle ABC \sim \triangle CBF$ (w, s:s). Daher gilt

$$\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle BCF} = \alpha \qquad (1)^{*}$$

und $\overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle CFB} = \gamma \qquad (2).$

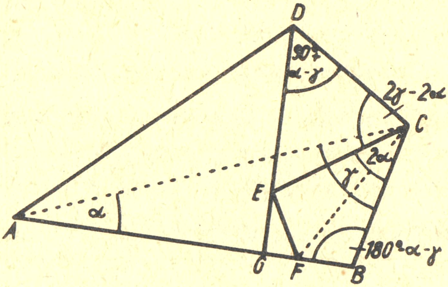


Abb. L 10;3.1

Aus (1) und (2) folgt

$$\overline{\sphericalangle CBF} = 180^{\circ} - \alpha - \gamma \qquad (3).$$

Da ABCD und CEFB Drachenvierecke mit den Symmetrieachsen AC bzw. CF sind, folgt weiter

$$\overline{\sphericalangle BCE} = 2\alpha \, ,$$
$$\overline{\sphericalangle DCB} = 2\gamma \, , \qquad (4)$$

also $\overline{\sphericalangle DCE} = 2\gamma - 2\alpha .$

Somit gilt in dem gleichschenkligen Dreieck $\triangle DEC$ für den Basiswinkel

$$\overline{\sphericalangle EDC} = 90^{\circ} + \alpha - \gamma . \qquad (5)$$

Der Strahl von D durch den im Innern von $\triangle ABD$ gelegenen Punkt E schneidet die Gerade durch A und B in G so, daß G zwischen A und B liegt. Dann haben in dem Viereck BCDG die Größen der Innenwinkel bei B, C, D nach (3),(4), (5) die Summe 270°, also gilt

$$\overline{\sphericalangle DGB} = 90^{\circ}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

---

*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

10/IV/3.2) Lösung:

8 Punkte

Jürgen könnte etwa folgende Lösung gefunden haben:

(I) Angenommen, ABCDE sei ein Fünfeck der genannten Art mit vorgeschriebenem Flächeninhalt F. Dann gilt

$$u = 3a + 2b \qquad (1)$$

und $$F = ab + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3},$$

also $$6a^2 + 4ab - 2au = 0$$

und $$4F - 4ab - a^2 \sqrt{3} = 0,$$

also $$a^2 (6 - \sqrt{3}) - 2au + 4F = 0,$$

d. h. $$a^2 - \frac{2u}{6-\sqrt{3}} a + \frac{4\,F}{6-\sqrt{3}} = 0. \qquad (2)$$

Diese quadratische Gleichung hat nur dann Lösungen, wenn

$$\left(\frac{u}{6-\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4F}{6-\sqrt{3}} \geqq 0, \qquad (3)$$

d. h. $$u^2 \geqq 4F\,(6 - \sqrt{3}),$$

d. h. $$u \geqq 2\sqrt{F\,(6 - \sqrt{3})} \qquad (4)$$

gilt. Wenn es daher Fünfecke der verlangten Art gibt, so gilt für jedes von ihnen die Ungleichung (4).

(II) Angenommen, es gäbe auch ein Fünfeck (der genannten Art mit vorgeschriebenem Flächeninhalt), für das sogar

$$u = 2\sqrt{F\,(6 - \sqrt{3})} \qquad (5)$$

gilt. Dann kann man wie in (I) auf die Gleichung (2) schließen; ferner gilt statt (3) wegen (5) sogar

$$\left(\frac{u}{6-\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4F}{6-\sqrt{3}} = 0.$$

Also hat (2) nunmehr die einzige Lösung

$$a = \frac{u}{6-\sqrt{3}},$$

also wegen (5) $$a = 2 \cdot \sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}. \qquad (6)$$

Aus (1), (5), (6) folgt

$$b = \frac{u}{2} - \frac{3a}{2} = \sqrt{F\,(6-\sqrt{3})} - 3\cdot\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$= (6-\sqrt{3}-3)\cdot\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$= (3-\sqrt{3})\cdot\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}. \qquad (7)$$

(III) Nun zeigen wir, daß ein Fünfeck mit den in (6), (7) angegebenen Werten für a und b die vorgeschriebenen Eigenschaften hat und kleinstmöglichen Umfang besitzt: Ein Fünfeck mit (6), (7) hat den Flächeninhalt

$$ab + \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{2(3-\sqrt{3})F}{6-\sqrt{3}} + \frac{F\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}} = \left[2(3-\sqrt{3})+\sqrt{3}\right]\cdot\frac{F}{6-\sqrt{3}} = F,$$

also den vorgeschriebenen Wert. Es gibt mithin Fünfecke der verlangten Art; nach (I) gilt für sie stets die Ungleichung (4). Insbesondere für ein Fünfeck mit (6), (7) wird der Umfang

$$u = 3a+2b = 6\cdot\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} + 2(3-\sqrt{3})\cdot\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}} = (3+3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{\frac{F}{6-\sqrt{3}}}$$

$$= 2\sqrt{F\,(6-\sqrt{3})},$$

d. h. möglichst klein.

(IV) Somit wird der Umfang eines Fünfecks der verlangten Art genau dann möglichst klein, wenn (6), (7) und damit

$$a : b = 2 : (3-\sqrt{3})$$

gilt.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

10/IV/4) Lösung:

7 Punkte | Angenommen, es gibt ein Tripel (m, x, y) mit den geforderten Eigenschaften. Dann ist

(3) $x = 5y - 11 < 0$,

also $y < \frac{11}{5}$. Daher ist y einer der Werte 1, 2; hierzu gehören nach (3) für x bezüglich die Werte -6, -1 und nach (1) für m bezüglich die Werte $\frac{15}{2}$, 4.
Also können höchstens die Tripel $(\frac{15}{2}, -6, 1)$ und (4, -1, 2) Lösung der Aufgabe sein.
Eine Probe zeigt, daß diese beiden Tripel das Gleichungssystem erfüllen und die übrigen geforderten Eigenschaften haben.

10/IV/5) Lösung:

6 Punkte | O. B. d. A. genügt es, drei Fälle zu unterscheiden:
1) A zwischen P und M, 2) P zwischen A und M,
3) A = P.

Im Fall 1 und 2 gilt $\triangle PMB \cong \triangle PMD$ (sws),

also $\overline{\sphericalangle MPB} = \overline{\sphericalangle MPD}$.

Im Fall 1 ist dies
dasselbe wie $\overline{\sphericalangle APQ} = \overline{\sphericalangle APT}$,

im Fall 2 folgt die letzte Gleichung ebenfalls, und zwar durch Übergang zu den Scheitelwinkeln.

Daher gilt in den Fällen 1 und 2
$\triangle PAQ \cong \triangle PAT$ (wsw),

also $\overline{AQ} = \overline{AT}$, (1)

und diese Gleichung trifft auch im Fall 3 zu. Der weitere Beweis verläuft für alle 3 Fälle gemeinsam.
Die Gerade g durch B, D ist parallel zu g_1 und g_2,

und es gilt $\overline{AM} = \overline{MC}$. Daraus folgt nach einem der Strahlensätze $\overline{QB} = \overline{BR}$. (2)

Aus (1) und (2) folgt nach der Umkehrung eines der Strahlensätze

$$AB \parallel TR$$

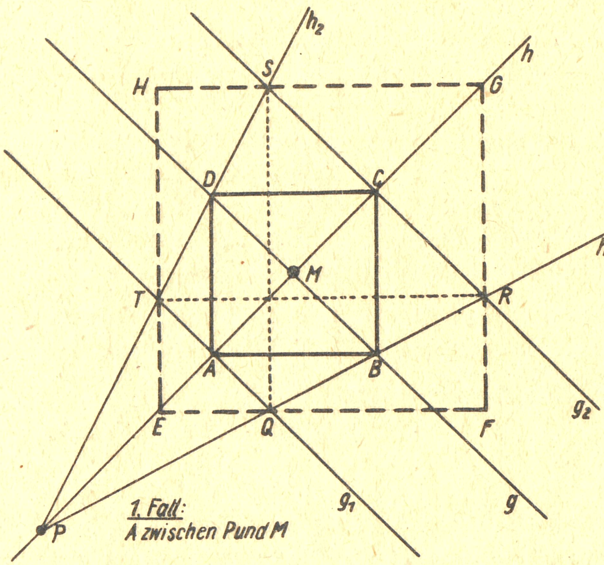
und dann nach einem der Strahlensätze

$$\overline{AB} : \overline{TR} = 1 : 2.$$

Analog erhält man $AD \parallel QS$
und $\overline{AD} : \overline{QS} = 1 : 2.$

Die Seiten des Rechtecks EFGH sind folglich parallel zu TR bzw. QS, und da diese Seiten bzw. ihre Verlängerungen durch Q, R, S, T gehen, haben sie selbst die Längen $\overline{TR}$ bzw. $\overline{QS}$, also $2\overline{AB}$ bzw. $2\overline{AD}$.

Somit gilt $I_2 = 4I_1$, d. h. $I_1 : I_2 = 1 : 4$.



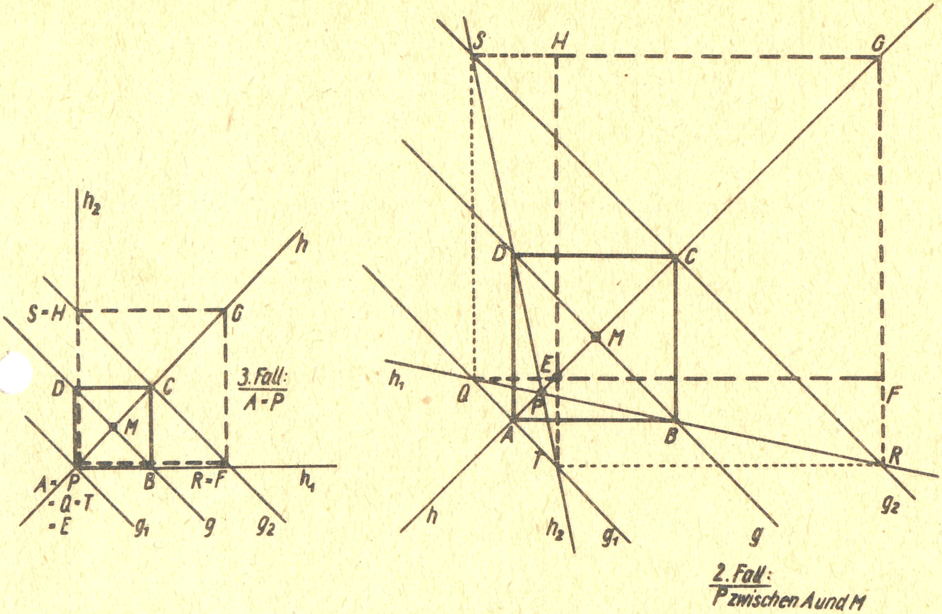


Abb. L 10;5

10/IV/6) <u>Lösung:</u>

7 Punkte Es seien H, K die Fußpunkte der Lote von D bzw. S auf die Ebene durch A, B, C. Ferner seien V_{ABCD} das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C, D und V_{ABCS} das des Tetraeders mit den Eckpunkten A, B, C, S (s. Abb. L 10;6). Nun gilt entweder

$$D' = H = K,$$

so daß $$\frac{\overline{SK}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}}$$

trivial richtig ist, oder

$$D'D \neq HD;$$

in diesem Falle ist $DH \parallel SK$, die Punkte D, H, K, D' und S liegen mithin in derselben Ebene.

Ferner gilt nach einem der Strahlensätze

$$(1)\quad \frac{\overline{SK}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} .$$

Da DH bzw. SK die Höhen der beiden betrachteten Tetraeder bezüglich der gleichen Grundfläche (der des Dreiecks $\triangle ABC$) sind, folgt auch

$$(1)\quad \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = \frac{V_{ABCS}}{V_{ABCD}} .$$

Analog erhält man

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} = \frac{V_{BCDS}}{V_{ABCD}} , \quad \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} = \frac{V_{ACDS}}{V_{ABCD}} , \quad \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} = \frac{V_{ABDS}}{V_{ABCD}} .$$

Nun gilt

$$V_{BCDS} + V_{ACDS} + V_{ABDS} + V_{ABCS} = V_{ABCD} .$$

Mithin ergibt sich

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{SB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{SC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{SD'}}{\overline{DD'}} = \frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = 1, \quad \text{w.z.b.w.}$$

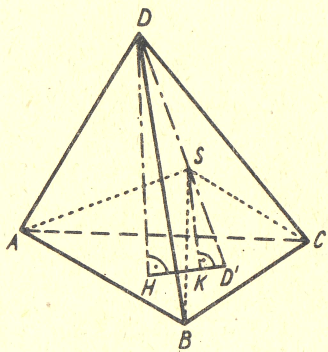


Abb. L 10; 6