XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/III/1) Ermitteln Sie alle geordneten Paare $(a;b)$ reeller Zahlen a,b mit $a \neq 0$, $b \neq 0$, für die folgendes gilt:

(1) Die Summe der beiden Zahlen ist 6.

(2) Die Summe der Reziproken beider Zahlen ist ebenfalls 6.

10/III/2) Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x,y) jeweils zweistelliger natürlicher Zahlen x und y mit $x > y$, für die folgendes gilt:

(1) Schreibt man die Ziffern der Zahl x in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y.

(2) Schreibt man die Ziffern der Zahl x^2 in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man die Zahl y^2.

10/III/3) Gegeben sei die Kathetenlänge $\overline{BC} = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, für das $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ gilt.
Die Halbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.
Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a.

Hinweis:
Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

A 10;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/III/4) Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R = 6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, daß die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt. Wie groß muß der Radius r (R, h, r in Zentimeter gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

10/III/5) Eine Funktion $f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sei, sei periodisch mit der Periode p, d.h. für alle reellen x gelte $f(x+p) = f(x)$, wobei p die kleinste positive Zahl sei, für die das gilt. Welche kleinste positive Periode hat dann die Funktion

a) $F(x) = \frac{1}{2}f(x)$,

b) $G(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$?

10/III/6) Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a - b = 3$ cm, $\alpha = 70^\circ$ und $\beta = 50^\circ$!
Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 – 1. Tag –

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

10/III/1) **Lösung:** 5 Punkte

Angenommen, es gibt ein Zahlenpaar (a;b), das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Dann gilt:

(3) $a + b = 6$ und

(4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6$.

Aus (3) folgt $b = 6 - a$ und $a \neq 6$, hieraus und aus (4)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{6 - a} = 6.$$

Nach Multiplikation mit $a(6 - a)$, Subtraktion von $6a(6 - a)$ und Division durch 6 ergibt sich $a^2 - 6a + 1 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Als zugehörige Werte erhält man aus (3)

$$b_{1,2} = 3 \mp 2\sqrt{2}.$$

Also können höchstens die Paare

$(3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2})$ und $(3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2})$

Lösung sein.

Tatsächlich gelten für sie die Gleichungen

$3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$ und

$$\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 6$$

sowie diejenigen Gleichungen, die durch Vertauschung von $(+2\sqrt{2})$ mit $(-2\sqrt{2})$ entstehen.

10/III/2) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

Angenommen, es gäbe ein Zahlenpaar (x,y), das den Bedingungen (1), (2) genügt. Setzt man $x = 10a + b$ (mit a,b natürlich und $1 \leqq a \leqq 9$, $1 \leqq b \leqq 9$), dann folgt $y = 10b + a$, und wegen $x > y$ auch $a > b$.

Wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a > b$ ist

$$2 \leqq a \leqq 9 \quad \text{und} \quad 1 \leqq b \leqq 8.$$

Das Quadrat der zweistelligen Zahl x ist entweder dreistellig oder vierstellig.

Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen x^2 dreistellig ist. Wegen $40^2 > 1000$ ist dann $a \leqq 3$.

Da auch $32^2 = 1024$ bereits vierstellig ist, können höchstens die Zahlen 21 bzw. 31 die Bedingungen (1), (2) erfüllen.

Tatsächlich gilt

$$21^2 = 441 \text{ und } 12^2 = 144 \text{ sowie}$$
$$31^2 = 961 \text{ und } 13^2 = 169.$$

Also erfüllen die Paare (21, 12) und (31, 13) die Bedingungen (1), (2).

Angenommen nun, die Bedingungen der Aufgabe seien mit einer Zahl x erfüllbar, deren Quadrat x^2 vierstellig ist. Dann gilt für die Ziffern a,b dieser Zahl

$$(3) \quad (10a + b)^2 = 1000c + 100d + 10e + f$$

sowie

$$(4) \quad (10b + a)^2 = 1000f + 100e + 10d + c$$

(mit c, d, e, f natürlich und $0 \leqq c, d, e, f \leqq 9$; $c, f \neq 0$).

Aus (3) und (4) folgt

$$100\,a^2 + 20\,ab + b^2 = 1000\,c + 100\,d + 10\,e + f$$
$$a^2 + 20\,ab + 100\,b^2 = c + 10\,d + 100\,e + 1000\,f.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$99a^2 - 99b^2 = 999c + 90d - 90e - 999f, \text{ also}$$

$$(5) \quad 11(a^2 - b^2) = 111\,c + 10\,d - 10\,e - 111\,f.$$

Da die linke Seite von (5) durch 11 teilbar ist, muß es auch die rechte Seite sein.

L 10;I

Addiert man zu $111c + 10d - 10e - 111f$ die durch 11 teilbare Zahl $1111f + 110e - 110c$, dann erhält man

$1000f + 100e + 10d + c = (10b + a)^2$,

und auch diese Zahl muß durch 11 teilbar sein. Daher muß schließlich $11 \mid (10b + a)$ gelten, was wegen $a \neq b$ nicht der Fall ist. Dieser Widerspruch beweist, daß es für vierstellige Zahlen x^2 kein derartiges Zahlenpaar (x,y) gibt. Daher erfüllen genau die Paare (21, 12) und (31, 13) die Bedingungen (1), (2).

10/III/3) **Lösung:** 8 Punkte

Nach Aufgabenstellung ist $\overline{AC} = 2a$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras

(1) $\overline{AB} = a\sqrt{5}$.

Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD.

Dann gilt nach dem im Hinweis angegebenen Satz

$\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$.

Daraus folgt wegen (1):

$\overline{AE} = \frac{2}{3}a\sqrt{5}$ und $\overline{EB} = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$.

Die Parallele zu BC durch E schneide AC in F. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

$\overline{EF} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AB} = 2 : 3$, woraus

$\overline{EF} = \frac{2}{3}a$ folgt. (Abb. L 10;3)

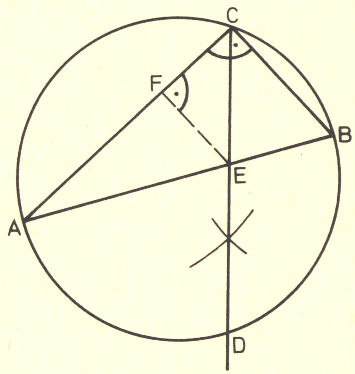

Abb. L 10;3

L 10;I

Dreieck $\triangle$ ~~EFC~~ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F und, da $\sphericalangle$ ACE eine Größe von 45° hat, auch gleichschenklig.

Also gilt $\overline{EF} = \overline{FC}$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt nun

$\overline{CE} = \frac{2}{3} a \sqrt{2}$.

[Weiter gilt: $\triangle$ ADE $\sim$ $\triangle$ BCE; denn

$\sphericalangle$ BEC $\cong$ $\sphericalangle$ AED (Scheitelwinkel) und

$\sphericalangle$ CBA $\cong$ $\sphericalangle$ CDA (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen).

Daher gilt: $\overline{CE} : \overline{EB} = \overline{AE} : \overline{ED}$] [1], woraus man

$$\overline{ED} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EB}}{\overline{CE}} = \frac{\frac{2}{3} a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{3} a\sqrt{5}}{\frac{2}{3} a\sqrt{2}} = \frac{5}{6} a\sqrt{2}$$ erhält.

Somit ergibt sich:

$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = \frac{2}{3} a\sqrt{2} + \frac{5}{6} a\sqrt{2} = \frac{3}{2} a\sqrt{2}.$$

[1] Hier kann auch einfach der Sehnensatz $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$ zitiert werden.

L 10;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 – 2. Tag –

__Achtung:__ Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

10/III/4) __Lösung:__ 6 Punkte

Für die Höhenlänge h_1 des Restkörpers gilt nach einem der Strahlensätze $R : r = h : (h - h_1)$ und damit

(1) $h_1 = h - \frac{hr}{R}$.

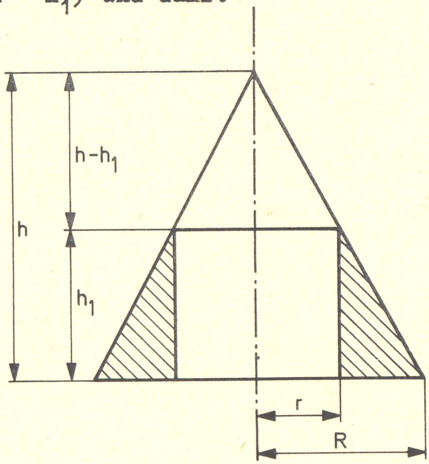

Abb. L 10;4

Es sei V das Volumen des Kegelkörpers und V_1 das Volumen des aus dem Kegel herausgebohrten Körpers.

Dann gilt

$V = \frac{1}{3} R^2 \cdot \pi \cdot h$, so daß die Forderung

$V_1 = \frac{1}{2} V$ mit

(2) $V_1 = \frac{1}{6} R^2 \cdot \pi \cdot h$ gleichbedeutend ist.

Das Volumen V_1 setzt sich zusammen aus dem eines geraden Kreiskegelkörpers mit dem Radius r und der Höhenlänge $(h - h_1)$ und aus dem eines geraden Kreiszylinderkörpers mit dem Radius r und der Höhenlänge h_1 (Abb. L 10;4).

Daher gilt

(3) $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h - h_1) + r^2 \cdot \pi \cdot h_1$.

Aus (2) und (3) folgt, daß r genau dann allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn

$\frac{\pi}{6} R^2h = \pi r^2h_1 + \frac{\pi}{3}r^2 h - \frac{\pi}{3}r^2h_1$ und $0 < r < R$ gilt.

Unter Berücksichtigung von (1) und wegen $\pi h \neq 0$ folgt, daß dies gleichwertig ist mit

$$\frac{1}{6}R^2 = \frac{2}{3}r^2 - \frac{2}{3}\frac{r^3}{R} + \frac{1}{3}r^2 = r^2 - \frac{2}{3}\frac{r^3}{R}\text{, woraus man}$$

$$\frac{2}{3}\frac{r^3}{R} - r^2 + \frac{1}{6}R^2 = 0\text{, also}$$

$$r^3 - \frac{3}{2}Rr^2 + \frac{1}{4}R^3 = 0 \quad \text{erhält.}$$

Wegen $R = 6$ folgt daraus

$$r^3 - 9r^2 + 54 = 0 .$$

Das ist eine kubische Gleichung für r. Durch sinnvolles Probieren ermittelt man $r = 3$ als eine Lösung dieser Gleichung; denn es ist $27 - 81 + 54 = 0$. Da $r = 3$ zwischen 0 und R liegt, ist $r = 3$ auch Lösung der Aufgabe.

Weil für $0 < r < R$ mit wachsendem r das Volumen des herausgebohrten Körpers monoton wächst und das Volumen des Restkörpers monoton abnimmt, kann es höchstens eine Lösung geben.

Daher ist $r = \frac{R}{2} = 3$ zugleich die einzige Lösung der Aufgabe.

10/III/5) <u>Lösung</u>: 2 Punkte

a) Für jedes reelle x gilt

$f(x + p) = f(x)$; hieraus folgt

$\frac{1}{2}f(x + p) = \frac{1}{2}f(x)$, d.h.

$F(x + p) = F(x)$.

Daher hat die Funktion $F(x)$ die Zahl p als eine Periode.

Ist umgekehrt q eine positive Periode von $F(x)$, so gilt für alle reellen x die Gleichung $F(x + q) = F(x)$, d.h. $\frac{1}{2}f(x + q) = \frac{1}{2}f(x)$, also $f(x + q) = f(x)$, so daß q dann auch eine Periode von $f(x)$ ist; nach Voraussetzung über p und $f(x)$ folgt hieraus $q \geq p$.

Daher ist p auch die <u>kleinste</u> positive Periode von $F(x)$.

3 Punkte

b) Für jedes reelle x ist auch $\frac{x}{2}$ reell; daher gilt $f(\frac{x}{2}+p) = f(\frac{x}{2})$, d.h. $f(\frac{x+2p}{2}) = f(\frac{x}{2})$, d.h. $G(x+2p) = G(x)$. Daher hat die Funktion $G(x)$ die Zahl $2p$ (die ebenfalls positiv ist) als eine Periode. Ist umgekehrt r eine positive Periode von $G(x)$, so gilt für alle reellen x die Gleichung $G(x + r) = G(x)$; d.h. $f(\frac{x+r}{2}) = f(\frac{x}{2})$, d.h.

$f(\frac{x}{2} + \frac{r}{2}) = f(\frac{x}{2})$. Da hierbei auch $\frac{x}{2}$ alle reellen Zahlen durchläuft, ist also $\frac{r}{2}$ eine (ebenfalls positive) Periode von $f(x)$; nach Voraussetzung über p und $f(x)$ folgt hieraus aber $\frac{r}{2} \geq p$, d.h. $r \geq 2p$. Daher ist $2p$ auch die kleinste positive Periode von $G(x)$.

Zusammen 5 Punkte

10/III/6) Lösung: 8 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Kreis um C mit b schneide BC in D. Dann ist $\overline{BD} = a - b$.

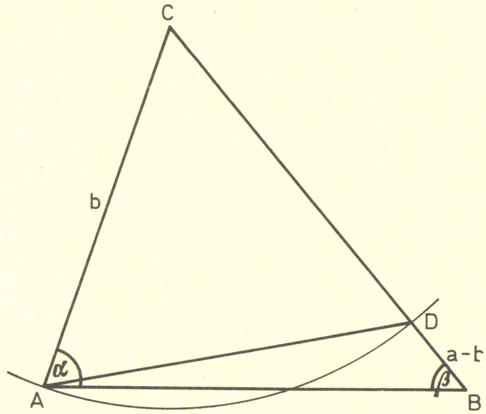

Abb. L 10;6

Das Dreieck $\triangle ADC$ ist gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{DC}$, also
$\overline{\sphericalangle CDA} = \frac{1}{2}(180^\circ - \overline{\sphericalangle ACD}) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 60^\circ$.
Der Winkel $\sphericalangle ADB$ hat daher eine Größe von $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Das Dreieck $\triangle ADB$ läßt sich aus $(a - b)$, β und $\overline{\sphericalangle ADB} = 120^\circ$ konstruieren. Punkt C liegt nun erstens auf dem von B ausgehenden Strahl durch D und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AB angetragenen Winkels der Größe α.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen eine Strecke BD der Länge $a - b$.

(2) Wir tragen an BD in B einen Winkel der Größe β und in D nach derselben Seite einen Winkel von 120° an. Schneiden sich die freien Schenkel dieser Winkel, so sei der Schnittpunkt A genannt

(3) Wir zeichnen die Gerade durch B und D.

(4) Wir tragen in A an AB nach derselben Seite, auf der D liegt, einen Winkel der Größe α an. Schneidet sein freier Schenkel die Gerade durch B und D, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Laut Konstruktion ist

$\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$ und $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$.

Ferner ist nach Konstruktion

$\overline{\sphericalangle CDA} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(180^\circ - \overline{\sphericalangle ACD})$,

also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{DC}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \overline{BC} - \overline{AC} &= \overline{BC} - \overline{DC} \\ &= \overline{BD} \text{ (, also nach Konstruktion)} \\ &= a - b. \end{aligned}$$

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets eindeutig ausführbar. Sie ergeben nach (w, s, w) mit den gegebenen Größen eindeutig ein Dreieck $\triangle ABD$.

Die Konstruktionsschritte (3) und (4) sind ebenfalls stets eindeutig ausführbar.

Wegen $\alpha + \beta < 180^\circ$ ist der Punkt C stets vorhanden und eindeutig bestimmt.