A 10

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 10

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/II/1) Fünf Schüler A, B, C, D, E spielen folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z. B. der Schüler A, verläßt den Raum. Nun werden auf ein Blatt Papier genau 10 Vierecke gezeichnet. Die Zeichnung wird versteckt, und A wird hereingerufen.

Jeder der Schüler B, C, D, E macht über die gezeichneten Vierecke genau eine Aussage. Von diesen Aussagen ist genau eine falsch.

Sie lauten:

(1) Auf der Zeichnung ist nicht nur ein Quadrat.

(2) Es sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate auf der Zeichnung.

(3) Man sieht unter den Vierecken auf der Zeichnung genau ein Parallelogramm.

(4) Auf der Zeichnung gibt es genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.

A soll nun feststellen, welche Aussage falsch ist. Außerdem soll er die genaue Anzahl der Quadrate, Rechtecke und Trapeze angeben. Wie kann das geschehen?

10/II/2) Zwei Autos starteten gleichzeitig und fuhren auf derselben Straße von A nach B. Das erste Auto benötigte für diese Strecke 4 Stunden, das zweite 3 Stunden.

Beide fuhren während der ganzen Zeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

a) Zu welchem Zeitpunkt nach dem Start war das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite?

b) Welche Strecke, ausgedrückt in Bruchteilen der gesamten Entfernung von A nach B, legte jedes Auto bis zu dem in a) gesuchten Zeitpunkt zurück?

10/II/3) Es seien u und v reelle Zahlen mit $0 < v < u$.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k mit $k > -\frac{v}{u}$, für die

$$(*) \qquad \frac{u + kv}{v + ku} < 1$$ gilt!

10/II/4) Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ die Basislänge $\overline{AB} = c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis 1 : 4 beträgt.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe

10/II/1) **Lösung:** 11 Punkte

Es gilt:
Jedes Quadrat ist gleichzeitig ein Rechteck, ein Parallelogramm und ein Trapez. Jedes Rechteck ist zugleich ein Parallelogramm und ein Trapez.
A kann daher z. B. folgendermaßen schließen:
Angenommen, die Aussage (1) wäre falsch, d. h., es gäbe auf der Zeichnung entweder kein Quadrat oder genau 1 Quadrat.
Nach den Spielregeln wären dann die Aussagen (2) bis (4) wahr. Gäbe es genau 1 Quadrat, so gäbe es nach (2) noch ein weiteres Rechteck, also mindestens 2 Parallelogramme, im Widerspruch zu (3). Gäbe es kein Quadrat auf der Zeichnung, so nach (2) und (4) auch kein Rechteck und kein Trapez, im Widerspruch zu (3).
Also ist (1) wahr.

Daher gibt es mindestens 2 Quadrate auf der Zeichnung.
Also ist (3) falsch, und (2), (4) sind wahr.
Gäbe es 3 oder mehr Quadrate auf der Zeichnung, so müßte wegen (2) und (4) die Anzahl der Trapeze mindestens 12 betragen, was nicht möglich ist.

Daher gilt:
Es gibt auf der Zeichnung genau 2 Quadrate, genau 4 Rechtecke und genau 8 Trapeze.

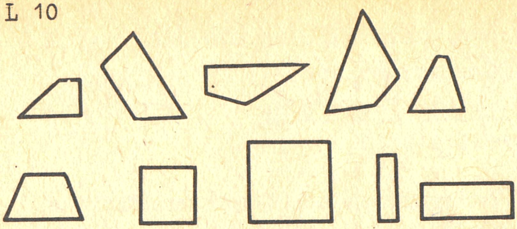

Abb. L 10;1

(Abb. L 10;1 zeigt eine mögliche Form der Zeichnung (wird vom Schüler nicht verlangt).)

10/II/2) <u>Lösung:</u>

a) Die Entfernung von A nach B betrage s km. 6 Punkte
Dann fuhr das erste Auto mit einer Geschwindigkeit von $\frac{s}{4}$ km h^{-1} und das zweite mit $\frac{s}{3}$ km h^{-1}.

Das erste Auto ist nach t Stunden genau dann doppelt so weit von B entfernt wie das zweite, wenn

$s - \frac{s}{4} \cdot t = 2(s - \frac{s}{3}t)$ gilt. Wegen $s \neq 0$

ist dies äquivalent mit

$1 - \frac{t}{4} = 2(1 - \frac{t}{3})$, also mit

$(\frac{2}{3} - \frac{1}{4})t = 1$ und daher schließlich mit

$$t = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Nach genau 2,4 h war daher das erste Auto genau doppelt so weit von B entfernt wie das zweite Auto.

b) Das erste Auto legte bis zu diesem Zeitpunkt wegen $\frac{s}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{3}{5}s$ genau $\frac{3}{5}$ des Weges, das zweite wegen 3 Punkte

$$\frac{s}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{4}{5}s \text{ genau } \frac{4}{5} \text{ des Weges zurück.}$$

insgesamt 9 Punkte

10/II/3) **Lösung:** 10 Punkte

Angenommen, für eine reelle Zahl k gelte
$(*)$.
Dann ist $v + ku > 0$, und
es folgt aus $(*)$:

(1) $u + kv < v + ku$, also
(2) $(u-v)(1-k) < 0$.

Wegen $u > v$ folgt daraus $k > 1$.
Also können höchstens alle $k > 1$ Lösungen von $(*)$ sein.
Tatsächlich ist für $k > 1$ die Ungleichung (2) und damit auch (1) sowie $(*)$ erfüllt.

Oder:

Tatsächlich gilt für $k = 1 + m$ ($m > 0$ reell)

$$\frac{u + (1 + m)\,v}{v + (1 + m)\,u} = \frac{u + v + mv}{u + v + mu}.$$

Nun ist aber wegen $v < u$ und $m > 0$
$mv < mu$, also

$0 < u + v + mv < u + v + mu$ und daher

$$\frac{u + v + mv}{u + v + mu} < 1, \quad \text{also} \quad \frac{u + kv}{v + ku} < 1.$$

10/II/4) **Lösung:** 10 Punkte

Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} + \overline{BC} = a$. Seine Basislänge sei $\overline{AB} = c$. Ferner sei CD eine Strecke auf der Mittelsenkrechten der Seite AB, wobei D auf AB liegen möge.
Dann ist CD gleichzeitig Halbierende des Winkels $\angle ACB$. Daher liegen die Mittelpunkte M_i und M_u von In- und Umkreis auf der Geraden durch C und D.

Die Radien der beiden Kreise seien r_i bzw. r_u.
Das Lot von M_i auf AC habe den Fußpunkt E, das Lot von M_u auf die Gerade durch A und C habe den Fußpunkt F.

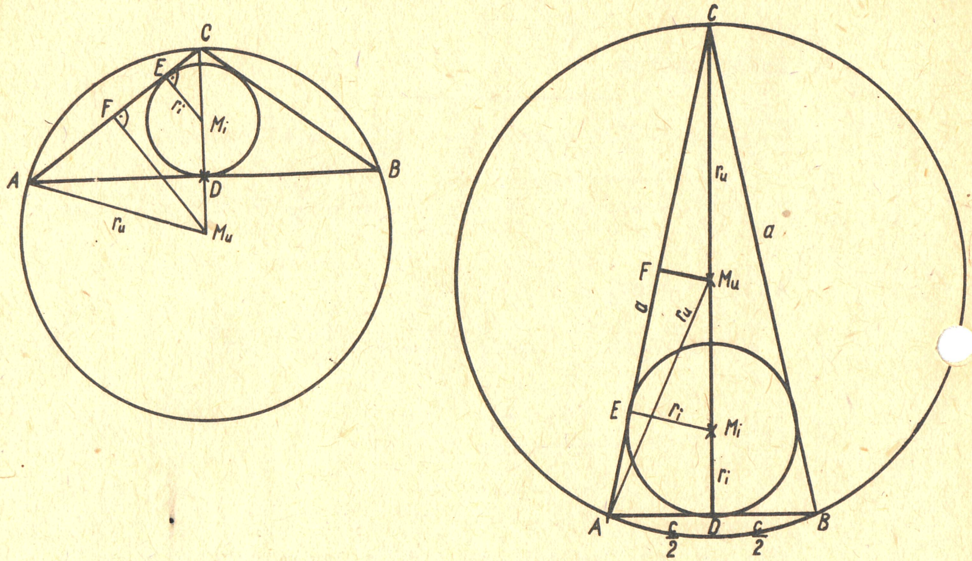

Abb. L 10;4

Dann ist $\overline{AF} = \overline{CF} = \frac{a}{2}$, $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{AE} = \frac{c}{2}$,

$$\overline{DM_u} = \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}},$$

$$\overline{CM_i} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + r_i^2} \,.$$

Daher erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle$ ACD

einerseits $\frac{c^2}{4} + \left(r_u \pm \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}}\right)^2 = a^2$,

wobei das obere **oder** untere Vorzeichen gilt, (je nachdem, ob M_u auf der Strecke CD liegt oder nicht), also

$$\pm r_u \sqrt{4r_u^2 - c^2} = a^2 - 2r_u^2 \,,$$

$$4 r_u^4 - c^2 r_u^2 = a^4 - 4a^2 r_u^2 + 4r_u^4 \,,$$

$$(1) \qquad r_u = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} ,$$

andererseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_i + \sqrt{a^2 - ac + \frac{c^2}{4} + r_i^2}\right)^2 = a^2, \text{ also}$$

$$r_i \sqrt{4a^2 - 4ac + c^2 + 4r_i^2} = ac - \frac{c^2}{2} - 2r_i^2 ,$$

$$4a^2r_i^2 - 4acr_i^2 + c^2r_i^2 + 4r_i^4$$
$$= a^2c^2 - ac^3 - 4acr_i^2 + \frac{c^4}{4} + 2c^2r_i^2 + 4r_i^4 ,$$

$$(2) \qquad r_i = \frac{c\,(a - \frac{c}{2})}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} .$$

Nun hat ein Dreieck genau dann die geforderten Eigenschaften, wenn $\pi r_i^2 : \pi r_u^2 = 1 : 4$ oder, äquivalent hiermit, $r_u = 2r_i$ gilt.

Nach (1), (2) ist dies gleichwertig mit $a^2 = c(2a - c)$, dies mit $(a - c)^2 = 0$ und daher mit $a = c$.

(<u>Anmerkung</u>: Wurde der letzte Absatz nicht als Übergang zu äquivalenten Aussagen, sondern als Folgerung formuliert, so ist anschließend noch eine „Probe" durchzuführen, etwa so:

Ist $a = c$, also $\triangle$ ABC gleichseitig, so ist $M_i = M_u$ zugleich Schwerpunkt S des Dreiecks, und daher gilt dann

$r_u : r_i = \overline{CS} : \overline{SD} = 2 : 1$.)