A 9;I

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 9 – 1. Tag –

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9/III/1) Günter erzählt:

"Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen: Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen.

Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl."

Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

9/III/2) In die nebenstehende Figur (Abb. A 9; 2) sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Feld genau eine steht und die drei "Zeilensummen", die drei "Spaltensummen" und die zwei "Diagonalsummen" sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat).

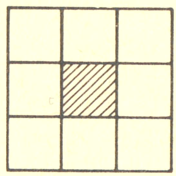

Abb. 9; 2

Beweisen Sie, daß eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem schraffierten Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!

9/III/3) Beweisen Sie den folgenden Satz:

Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

A 9;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9/III/4) In einem Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = b$ $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.

Ermittle das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\sphericalangle AS_2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

9/III/5) Es seien a, b, c positive reelle Zahlen.

Beweisen Sie, daß dann

$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$ gilt!

Geben Sie alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

9/III/6) Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind:

$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0.$

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 – 1. Tag –

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

9/III/1) <u>Lösung</u>: 6 Punkte

Die sechsstellige Telefonnummer läßt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$z = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10^1 + f$

mit natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, f, für die

$0 \leq b, c, d, e, f \leq 9$ und $b, c, d, e, f \neq 1$ sowie $2 \leq a \leq 9$

gilt. Wäre $a + b \geq 10$, so wäre die erste Ziffer c der Summe $a + b$ eine 1.

Also gilt:

$a + b = c \leq 9$. Ebenso erhält man $b + c = d \leq 9$,

$c + d = e \leq 9$, $d + e = f \leq 9$. *)

Angenommen, es wäre $a \geq 4$. Dann wäre $c \geq 4$ und $d \geq 4$ und mithin $e \geq 8$, was $d + e = f \geq 12$ zur Folge hätte, im Widerspruch zu $f \leq 9$. Also gilt $a \leq 3$, woraus laut Aufgabe $a = 2$ oder $a = 3$ folgt. Angenommen, es wäre $b > 0$. Dann müßte laut Aufgabe $b \geq 2$ gelten. Daraus folgte $c \geq 4$, $d \geq 6$ und $c + d = e \geq 10$, was nicht möglich ist. Also gilt $b = 0$. Da Günters Hausnummer eine durch 3 teilbare Zahl ist, gilt $a = 3$.

Die Hausnummer lautet also 30 und die Telefonnummer seiner Schule 30 33 69.

*) <u>Andere Lösungsfortsetzung</u>:

Aus den Gleichungen $a + b = c$, $b + c = d$, $c + d = e$, $d + e = f$ (die wie oben gefunden werden) folgt der Reihe nach:

$$a + b + b = d, \text{ d.h. } a + 2b = d;$$

$$a + b + a + 2b = e, \text{ d.h. } 2a + 3b = e;$$

$$a + 2b + 2a + 3b = 3a + 5b = f.$$

Wegen $f < 10$ gilt nun

$$3a + 5b < 10 \text{ mit } a \geq 2 .$$

Daraus folgt $5b < 4$, also $b = 0$ und

weiter $3a < 10$, also $2 \leq a \leq 3$.

Wegen der Teilbarkeit der Hausnummer durch 3 erhält man hieraus $a = 3$, also 30 als die gesuchte Hausnummer und 30 33 69 als Telefonnummer von Günters Schule.

9/III/2) **Lösung:** 7 Punkte

Die neun aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien mit $n, n + 1, \dots, n + 8$ bezeichnet. Ihre Summe beträgt dann $9n + 36$. Da die drei "Zeilensummen" gleich sein sollen, muß jede von ihnen $3n + 12$ betragen. Laut Aufgabe gilt das auch für die übrigen fünf Summen. Unter ausschließlicher Verwendung der gegebenen Zahlen läßt sich diese Summe auf genau 8 verschiedene Weisen aus je 3 verschiedenen Summanden bilden, nämlich auf folgende Weisen:

$n + (n+4) + (n+8)$
$n + (n+5) + (n+7)$
$(n+1) + (n+3) + (n+8)$
$(n+1) + (n+4) + (n+7)$
$(n+1) + (n+5) + (n+6)$
$(n+2) + (n+3) + (n+7)$
$(n+2) + (n+4) + (n+6)$
$(n+3) + (n+4) + (n+5)$

In diesen Summen [kommen die Summanden n, $(n + 2)$, $(n + 6)$ und $(n + 8)$ genau je zweimal, die Summanden $(n + 1)$, $(n + 3)$, $(n + 5)$ und $(n + 7)$ genau je dreimal, und es][1] kommt nur der Summand $(n + 4)$ genau viermal vor. Bei der Bildung der "Zeilen-", "Spalten-" und "Diagonalsummen" wird nur das schraffierte Feld genau viermal, [die Eckfelder werden je dreimal und alle übrigen Felder je zweimal][1] belegt. Daher muß in dem schraffierten Feld die Zahl $(n + 4)$, das ist die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen $n, \dots, (n + 8)$, stehen, und wenn sie dort steht, gibt es die angegebene Möglichkeit.

[1] Die eingeklammerten Angaben sind für eine (vollständige) Lösung nicht erforderlich.

9/III/3) **Lösung:** 7 Punkte

Das Dreieck $\triangle ABC$ ist wegen $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$ nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras rechtwinklig. Es sei o.B.d.A. $\overline{AC} = m$, $\overline{BC} = m\sqrt{2}$ und $\overline{AB} = m\sqrt{3}$ (m eine positive reelle Zahl) gesetzt. Dann ist AB Hypotenuse, der rechte Winkel liegt also bei C (der größten Seite liegt der größte Winkel gegenüber).

Es seien D der Mittelpunkt von AB, E der Mittelpunkt von BC und S der Schnittpunkt von CD und AE.

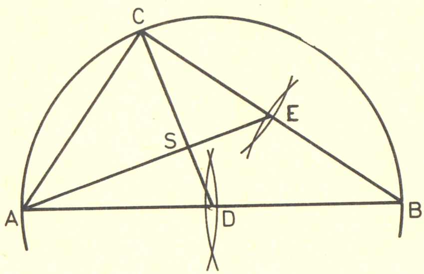

Abb. L 9;3

Nach der Umkehrung des Satzes des Thales gilt nun:

$\overline{CD} = \overline{AD} = \overline{DB} = \frac{1}{2} m\sqrt{3}$.

Daraus und aus dem Satz über das Teilverhältnis zweier sich schneidenden Seitenhalbierenden eines Dreiecks folgt:

(1) $\overline{CS} = \frac{2}{3} CD = \frac{1}{3} m\sqrt{3}$.

Es gilt nach dem Satz des Pythagoras ($\triangle$ AEC)

$$\overline{AE} = \sqrt{m^2 + \frac{m^2}{2}} = \frac{1}{2}m\sqrt{6} .$$

Mithin gilt:

(2) $\overline{AS} = \frac{2}{3} \overline{AE} = \frac{1}{3} m\sqrt{6}$.

Wegen (1) und (2) gilt $\overline{CS}^2 + \overline{AS}^2 = \frac{m^2}{3} + \frac{2m^2}{3} = m^2 = \overline{CA}^2$.

Daher ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras $\triangle ASC$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei S, die Seitenhalbierenden CD und AE stehen also senkrecht aufeinander w.z.b.w..

L 9;II XI. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

9/III/4) **Lösung:** 6 Punkte

Ein Rechteck ABCD genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $\sphericalangle AS_2S_1 \cong \sphericalangle S_1S_2C$ gilt. Da ferner in jedem Rechteck $\sphericalangle AS_2S_1 \cong \sphericalangle S_2S_1C$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein Rechteck genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn

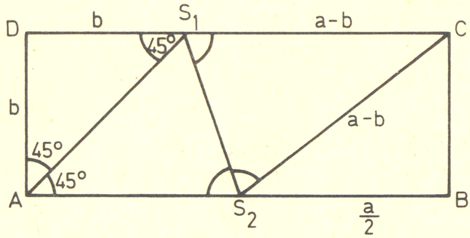

Abb. L 9;4

das Dreieck $\triangle S_1S_2C$ gleichschenklig mit $\overline{S_1C} = \overline{S_2C}$ ist. Nun ist das rechtwinklige Dreieck $\triangle ADS_1$ stets gleichschenklig, da $\sphericalangle DAS_1$ eine Größe von 45° hat und somit
$\sphericalangle DAS_1 \cong \sphericalangle AS_1D$ gilt.

Daher gilt:
$\overline{DS_1} = \overline{DA} = b$, und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $\overline{S_2C} = \overline{S_1C} = a - b$ gilt. Da $\triangle S_2BC$ rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a - b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit,

$$a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}\text{ , d.h.}$$

$$\frac{3}{4}a^2 = 2\ ab$$

gilt.

Wegen $a \neq 0$ trifft dies genau für

$$a : b = 8 : 3$$

zu.

9/III/5) Lösung: 6 Punkte

Es gilt $(a + b - c)^2 \geqq 0$, und das Gleichheitszeichen gilt genau für $a + b = c$. Daraus folgt

$$(a - b)^2 - 2(a + b)c + c^2 \geqq 0, \text{ also}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 2(bc + ac - ab).$$

Nach Division durch die positive reelle Zahl abc ergibt das

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geqq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right),$$ und das

Gleichheitszeichen gilt genau für

$$a + b = c .$$

9/III/6) Lösung: 8 Punkte

Angenommen, die Gleichung hätte eine Lösung. Dann gilt

$y(2x + 1) = 2x^2 - 5x + 19$, also

$$y = x - 3 + \frac{22}{2x + 1} \text{ mit } x \neq -\frac{1}{2} .$$

Da x, y ganzzahlig sein sollen, muß auch $\frac{22}{2x + 1}$ eine ganze Zahl sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $2x + 1$ ein Teiler von 22, d.h., eine der Zahlen $-22; -11; -1; 1; 11; 22$ ist.

Für $2x + 1 = \pm 22$ ist x nicht ganzzahlig. In den übrigen Fällen erhält man für x der Reihe nach die Werte $-6; -1; 0; 5$ und daraus für y die Werte $-11, -26, 19, 4$.

Also können höchstens die Zahlenpaare $(-6; -11)$, $(-1; -26)$, $(0; 19)$, $(5; 4)$ Lösung sein.

Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung findet man, daß sie es auch sind.