XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 9

__Achtung:__ Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9/II/1) Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.
Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

9/II/2) Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a,b) ganzer Zahlen a und b $(b \neq 0)$ mit folgender Eigenschaft:
Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

9/II/3) Eine Kreislinie sei in 30 gleichgroße Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.
Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

9/II/4) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so daß die Gleichungen

(1) $a + b = p_2$ und

(2) $a - b = p_1$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

9/II/1) **Lösung:** 7 Punkte

Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Mit r sei die Maßzahl des (in Zentimeter gemessenen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl seiner Höhenlänge (ebenfalls in cm) bezeichnet.
Dann beträgt die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche (in cm): $2\pi r$,
die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2): $2\pi r h$
und die Maßzahl seines Volumens (in cm^3): $\pi r^2 h$, und es gilt:

$2\pi r = 2\pi rh$, woraus wegen $r \neq 0$
$h = 1$ folgt.
Ferner gilt:
$2\pi r h = \pi r^2 h$, woraus wegen $r \neq 0$, $h \neq 0$
$r = 2$ folgt.
Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Tatsächlich ist in diesem Falle
der Umfang der Grundfläche: 4π cm
der Mantelflächeninhalt: 4π cm^2 und
das Volumen: 4π cm^3.

9/II/2) **Lösung:** 10 Punkte

Angenommen, (a,b) sei ein Zahlenpaar, das zusammen mit einer geeigneten Zahl n der gestellten Bedingung genügt, dann gilt:

$$\frac{a+n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;.$$

Daraus erhält man

$$ab + bn = abn.$$

Wegen $b \neq 0$ folgt

$$a + n = an, \quad \text{also}$$

(1) $$a = n(a - 1).$$

Aus (1) folgt $a \neq 1$ und daher

$$n = \frac{a}{a-1} = 1 + \frac{1}{a-1} \;.$$

Da n ganzzahlig ist, ergibt sich weiter

$$a - 1 = \pm 1, \text{ also } a = 2 \text{ oder } a = 0,$$

und wegen $n > 0$ schließlich $a = 2$.

Daher können nur Zahlenpaare der Form (2, b) und zu jedem dieser Paare nur $n = 2$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Tatsächlich ist

$$\frac{2+2}{b \cdot 2} = \frac{4}{2b} = \frac{2}{b} \;.$$

Die Lösungsmenge besteht also aus allen Zahlenpaaren der Form (2, b) ($b \neq 0$ ganz).

9/II/3) <u>Lösung:</u> 11 Punkte

Der Mittelpunkt des Kreises sei M. Die Strecke P_7P_{18} zerlegt den Kreis in zwei Teile, wobei P_{12} in dem einen und P_{21} in dem anderen Teil liegt. Daher schneiden sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ in einem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte, der S genannt sei.

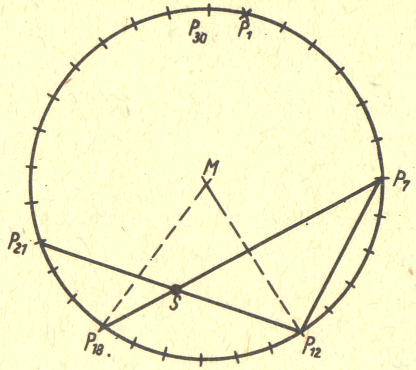

Abb. L. 9;3

Dann beträgt die Größe des Zentriwinkels $\sphericalangle P_{18}MP_{12}$, da ihm ein Fünftel des gesamten Kreisumfangs als Bogen zugeordnet ist, 72°. Folglich ist der Winkel $\sphericalangle P_{18}P_7P_{12}$ als ein zu dem gleichen Bogen $\overset{\frown}{P_{12}P_{18}}$ gehörender Peripheriewinkel halb so groß, also 36° groß.

Analog erhält man für den Winkel $\sphericalangle P_7MP_{21}$, dem $\frac{8}{15}$ des Umfangs zugeordnet ist, eine Größe von 192° und daher für den Winkel $\sphericalangle P_7P_{12}P_{21}$ eine Größe von 96°.

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle P_{12}SP_7$ hat mithin $\sphericalangle P_{12}SP_7$, einer der Schnittwinkel der oben genannten Strecken, eine Größe von $180^\circ - (36^\circ + 96^\circ) = 48^\circ$.

Die Größen der anderen Schnittwinkel $\sphericalangle P_{12}SP_{18}$, $\sphericalangle P_{18}SP_{21}$, $\sphericalangle P_{21}SP_7$ als Neben- oder als Scheitelwinkel des Winkels $\sphericalangle P_{12}SP_7$ sind 132°, 48°, 132°.

9/II/4) <u>Lösung:</u> 12 Punkte

Zu p_1 und p_2 kann man zunächst stets reelle Zahlen a und b eindeutig so bestimmen, daß (1) und (2) erfüllt sind, nämlich

$$a = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad b = \frac{p_2 - p_1}{2}.$$

Der verlangte Beweis ist geführt, wenn noch gezeigt wird, daß a, b natürliche Zahlen sind, deren Produkt durch 6 teilbar ist.
Da p_1, p_2 nach Voraussetzung zwei von der Primzahl 2 verschiedene Primzahlen sind, sind sie beide ungerade.
Folglich sind $p_1 + p_2$ und $p_2 - p_1$ gerade, also a und b ganze Zahlen.
Ferner ist $p_1 + p_2 > 0$ und wegen $p_1 < p_2$ auch $p_2 - p_1 > 0$, also sind a und b natürliche Zahlen.
Da ihre Summe $a + b = p_2$ ungerade ist, ist eine der Zahlen a, b gerade. Also ist $a \cdot b$ gerade.
Nach Voraussetzung sind p_1 und p_2 von der Primzahl 3 verschiedene Primzahlen. Daher sind sie nicht durch 3 teilbar, d. h. jede von ihnen läßt bei Division durch 3 einen der Reste 1 oder 2.
Lassen beide den gleichen Rest, dann ist $2b = p_2 - p_1$ durch 3 teilbar, also auch b. Lassen beide verschiedene Reste, so ist $2a = p_1 + p_2$ durch 3 teilbar, also auch a.
Daher ist $a \cdot b$ in jedem Falle durch 3 teilbar.
Aus $2 \mid a \cdot b$ und $3 \mid a \cdot b$ folgt, da 2 und 3 teilerfremd sind, schließlich $6 \mid a \cdot b$, w.z.b.w.