A 8;I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8/III/1) In ein leeres Gefäß (ohne Abfluß) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.
Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

8/III/2) Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, daß kein Schnittpunkt, der zweite so, daß genau 1 Schnittpunkt auftritt, der dritte so, daß genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, daß genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, daß genau vier Schnittpunkte, der sechste so, daß genau 5 Schnittpunkte, und der siebente Schüler so, daß genau 6 Schnittpunkte auftreten. Auch Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen, werden hierbei mitgezählt.
Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, daß ihre Aufgabe nicht lösbar sei. Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

8/III/3) Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen

$a = -5x + 12$
$b = 3x + 20$
$c = 4x + 16$

existiert! (Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

A 8;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8/III/4) Beweise, daß für je zwei rationale Zahlen $a > 2$, $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

8/III/5) Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

„Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuß und dann dem zweiten, dem dritten usw. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.

Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt? Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?"

8/III/6) Einem Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm EFGH so einbeschrieben, daß die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2 : 3$ oder $3 : 2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3 : 4$ oder $4 : 3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist!

Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

L 8;I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

8/III/1) Lösung: 6 Punkte

Die vom Anfang bis zum Zeitpunkt t vergangene Zeit, während der also genau 30 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, betrage x, dann sind in der Zeit, während der genau 15 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, genau (40 - x) Sekunden vergangen, und es gilt:

$$30x + (40 - x) \cdot 15 = 1000, \text{ also}$$
$$15x = 400, \text{ woraus man}$$
$$x = \frac{80}{3} \text{ erhält.}$$

Während dieser $\frac{80}{3}$ s flossen genau $\frac{80}{3} \cdot 30$ l, das sind 800 l Wasser, in das Gefäß. Wegen $\frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$ waren daher zum Zeitpunkt t genau $\frac{4}{5}$ des Gefäßes gefüllt.

8/III/2) Lösung: 2 Punkte

Der zweite und der sechste Schüler haben nicht recht; denn es gibt z.B. folgende Lösungen:

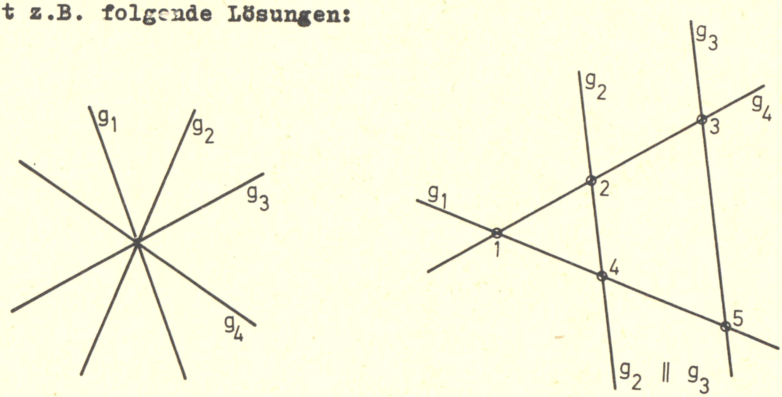

Abb. L 8;2

30 05 13 - 1

L 8;I

Der dritte Schüler hat recht. 4 Punkte

Beweis:

Angenommen, es gäbe 4 Geraden so, daß genau 2 Schnittpunkte auftreten. Da Schnittpunkte existieren, können die vier Geraden nicht sämtlich parallel zueinander sein. O.B.d.A. mögen sich die Geraden g_1 und g_2 im Punkt A schneiden.

Von den beiden anderen Geraden muß mindestens eine nicht durch A gehen, da sonst nur A als Schnittpunkt aufträte. Dies sei etwa die Gerade g_3. Sie hat also mit einer der beiden Geraden, etwa mit g_1, einen von A verschiedenen Schnittpunkt B.

Dann gilt $g_3 \parallel g_2$, weil sonst entgegen der Aufgabe g_3 mit g_2 einen weiteren von A und B verschiedenen Schnittpunkt hätte.

Die vierte Gerade kann nun nicht ebenfalls zu g_2 und g_3 parallel sein, da sie dann g_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden würde. Also hat sie einen Schnittpunkt A' mit g_2 und einen Schnittpunkt B' mit g_3. Da sie von g_1 verschieden ist, kann nicht gleichzeitig A = A' und B = B' sein. Somit tritt außer A und B noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt auf. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme, es gäbe 4 Geraden, für die genau 2 Schnittpunkte auftreten, falsch war.

Zusammen 6 Punkte

8/III/3) <u>Lösung</u>: 8 Punkte

Ein Dreieck $\triangle$ ABC mit drei reellen Zahlen a, b, c als Seitenlängen existiert genau dann, wenn gleichzeitig die Ungleichungen

(1) $a > 0$, (4) $a < b + c$,

(2) $b > 0$, (5) $b < a + c$,

(3) $c > 0$, (6) $c < a + b$

gelten. Es ist genau dann gleichschenklig, wenn $a = b$ oder $a = c$ oder $b = c$ gilt. Die Bedingung $a = b$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 3x + 20$, also mit $x = -1$. Daraus ergibt sich $a = b = 17$ und $c = 12$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

L 8;I

Die Bedingung $a = c$ ist gleichbedeutend mit
$-5x + 12 = 4x + 16$, also mit $x = -\frac{4}{9}$.
Daraus ergibt sich $a = c = \frac{128}{9}$ und $b = \frac{55}{3}$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.
Die Bedingung $b = c$ ist gleichbedeutend mit
$3x + 20 = 4x + 16$, also mit $x = 4$.
Daraus ergibt sich $b = c = 32$ und $a = -8$, d.h. (1) ist nicht erfüllt.
Mithin gibt es genau für $x = -1$ und $x = -\frac{4}{9}$ je ein gleichschenkliges Dreieck.

L 8;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8 - 2. Tag -

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

8/III/4) <u>Lösung</u>: 5 Punkte

Nach Voraussetzung ist $a - 2 > o$ und $b - 2 > o$, also

$(a - 2)(b - 2) = ab - 2(a + b) + 4 > 0$, d.h.

$ab > 2(a + b) - 4$.

Ferner folgt aus $a > 2$, $b > 2$, daß

$a + b > 4$ ist, woraus

$2(a + b) - 4 > (a + b)$ und damit erst recht

$ab > (a + b)$ folgt.

<u>Anderer Lösungsweg</u>:

Setzt man

$a = 2 + m$,

$b = 2 + n$, so sind m, n wegen $a, b > 2$ positiv. Ferner gilt dann

$a + b = 2 + m + 2 + n = 4 + m + n$ und

$$a \cdot b = (2+m)(2+n) = 4 + 2(m + n) + mn$$
$$= 4 + m + n + m + n + mn$$
$$= a + b + (m + n + mn),$$

woraus wegen $m + n > 0$ und $mn > 0$

$a \cdot b > a + b$ folgt.

<u>Oder</u>:

Wegen $a > 2$, $b > 2$ ist $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,

also $\frac{a + b}{ab} < 1$ und folglich wegen $ab > 0$

auch $a + b < ab$.

30 05 13 - 1

8/III/5) **Lösung:** 6 Punkte

Die Anzahl der Nüsse in dem Gefäß sei x.

Dann würde der erste Pionier

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \text{ erhalten,}$$

als Rest blieben $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Davon würde der zweite Pionier

$\frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$ erhalten,

als Rest blieben

$\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 3)$.

Davon würde der dritte Pionier

$\frac{1}{8}(x - 3) + \frac{1}{2}$ erhalten,

als Rest blieben

$\frac{1}{8}(x - 3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x - 7)$.

Davon würde der vierte Pionier

$\frac{1}{16}(x - 7) + \frac{1}{2}$ erhalten,

als Rest blieben

$\frac{1}{16}(x - 7) - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(x - 15)$.

Davon würde der fünfte Pionier

$\frac{1}{32}(x - 15) + \frac{1}{2}$ erhalten,

als Rest blieben

$\frac{1}{32}(x - 15) - \frac{1}{2} = \frac{1}{32}(x - 31)$.

Dieser Rest betrug laut Aufgabe Null. Daraus folgt $x = 31$.
Also enthielt das Gefäß genau 31 Nüsse. Von diesen würden bekommen:

Der 1. Pionier	16 Nüsse,
der 2. Pionier	8 Nüsse,
der 3. Pionier	4 Nüsse,
der 4. Pionier	2 Nüsse und
der 5. Pionier	1 Nuß.

8/III/6) **Lösung:** 9 Punkte

Laut Aufgabe ist EFGH ein Parallelogramm. Daraus folgt:

$\overline{HE} = \overline{GF}$, $\overline{HG} = \overline{EF}$,

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle HEG \cong \sphericalangle FGE \\ \sphericalangle AEG \cong \sphericalangle CGE\end{array}\right\}$$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

Also gilt:

$\sphericalangle AEH \cong \sphericalangle CGF$.

Mithin ist

$\triangle AEH \cong \triangle CGF$ (s,w,w).

Analog läßt sich zeigen, daß

$\triangle BEF \cong \triangle DGH$ gilt.

Folglich gilt:

$\overline{AE} = \overline{CG}$, $\overline{BE} = \overline{DG}$, $\overline{AH} = \overline{CF}$, $\overline{DH} = \overline{BF}$, und es gibt genau die folgenden 4 Möglichkeiten, einem Rechteck ABCD ein Parallelogramm EFGH in der geforderten Weise einzubeschreiben (s. Abb. L 8;6):

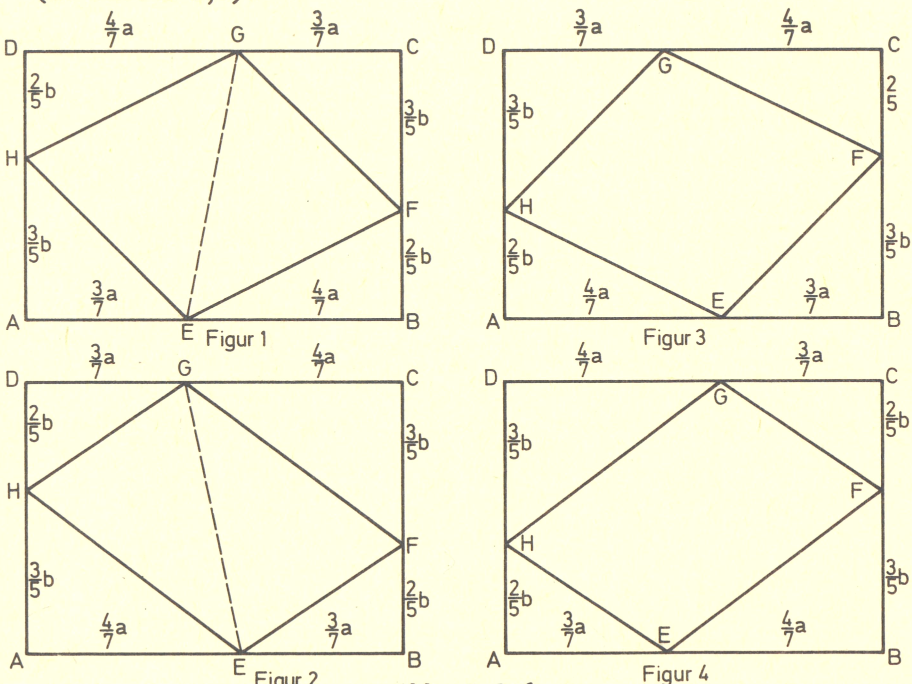

Abb. L 8;6

Dabei kann man Fig. 3 durch eine Spiegelung der Fig. 1 und Fig. 4 durch eine Spiegelung der Fig. 2 an der Mittelsenkrechten zu AB gewinnen. Es sind daher die folgenden beiden Fälle zu betrachten:

Fall 1:

Es sei $\overline{DH} : \overline{HA} = \overline{BF} : \overline{FC} = 2 : 3$

und $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CG} : \overline{GD} = 3 : 4$.

Dann ist der Flächeninhalt A_P des Parallelogramms EFGH gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt A_R des Rechtecks ABCD und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle$ AEH, $\triangle$EBF, $\triangle$FCG und $\triangle$ GDH.

Also gilt:

$$A_P = ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right)$$
$$= ab - \left(\frac{9}{35}\,ab + \frac{8}{35}\,ab\right)$$
$$= \frac{18}{35}\,ab.$$

Daraus folgt

$$A_R : A_P = 35 : 18$$

Fall 2:

Es sei $\overline{DH} : \overline{HA} = \overline{BF} : \overline{FC} = 2 : 3$

und $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{CG} : \overline{GD} = 4 : 3$.

Analog wie im Fall 1 erhält man dann

$$A_P = ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right)$$
$$= ab - \left(\frac{12}{35}\,ab + \frac{6}{35}\,ab\right)$$
$$= \frac{17}{35}\,ab, \text{ woraus}$$

$A_R : A_P = 35 : 17$ folgt.