A 8

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 8

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8/II/1) Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p - 1$, $p + 1$ durch 6 teilbar.

8/II/2) Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

8/II/3) Beweise, daß für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

8/II/4) In einer Ebene ε seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, daß dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, daß es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

L 8 XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

8/II/1) Lösung: 9 Punkte

Jede Primzahl $p > 3$ ist eine ungerade Zahl, folglich müssen sowohl $p - 1$ als auch $p + 1$ gerade, also durch 2 teilbar sein.

Wegen $p > 3$ ist p auch nicht durch 3 teilbar und läßt daher bei Division durch 3 genau einen der Reste 1, 2.

Im ersten Fall ist von den beiden Zahlen $p - 1$, $p + 1$ genau die erste, im zweiten Fall genau die zweite durch 3 teilbar. Deshalb und weil beide Zahlen $p - 1$ und $p + 1$ gerade sind, ist wegen der Teilerfremdheit von 2 und 3 genau eine der Zahlen $p - 1$ oder $p + 1$ durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar.

8/II/2) Lösung: 11 Punkte

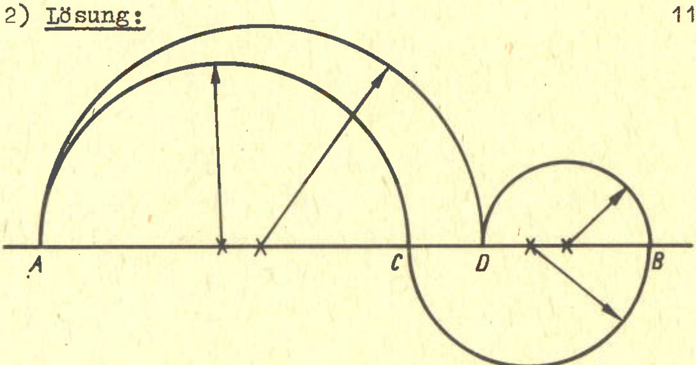

Abb. L 8;2

Die Länge des Halbkreisbogens über AC beträgt $\overline{AC} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Die Länge des Halbkreisbogens über AD beträgt $\overline{AD} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Die Länge des Halbkreisbogens über DB beträgt

$\overline{DB} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Die Länge des Halbkreisbogens über CB beträgt

$\overline{CB} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Daher beträgt die gesuchte Summe

$$s = (\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{CB}) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot \pi \, .$$

8/II/3) Lösung: 8 Punkte

Der Mittelpunkt des Umkreises sei M.

Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel folgt:

$\measuredangle$ AMS $\cong$ $\measuredangle$ SMB und, da M Mittelpunkt des Umkreises ist, $\overline{AM} = \overline{SM} = \overline{BM}$. Daher gilt:

$\triangle$ AMS $\cong$ $\triangle$ SMB (sws), woraus

$\overline{AS} = \overline{SB}$ folgt.

Infolgedessen liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

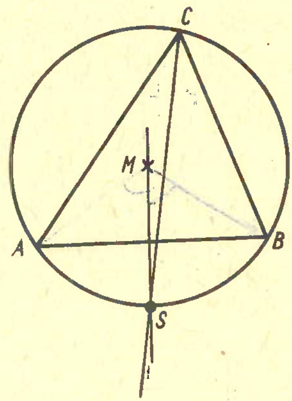

Abb. L 8;3

L 8

8/II/4) Lösung: 4 Punkte

a) Liegt P auf g, so auch P', und es gilt

(1) $\overline{QP} = \overline{QP'}$.

Liegt P nicht auf g, so ist $P' \neq P$, und die Gerade durch P und P' steht senkrecht auf g. Ist S ihr Schnittpunkt mit g, so gilt ferner $\overline{SP} = \overline{SP'}$. Wenn nun $S = Q$ ist, so ist damit (1) gezeigt. Wenn aber $S \neq Q$ ist, so erhält man

$$\triangle QSP \cong \triangle QSP' \quad (s,w,s)$$

und hieraus ebenfalls (1). Mit (1) ist bereits die Behauptung bewiesen.

b) Ist $P' = P$, so hat die Gerade g durch P, Q die behauptete Eigenschaft. Ist $P' \neq P$ ein Punkt des Kreises um Q mit $\overline{PQ}$, so gilt (1), und daher geht die Mittelsenkrechte g von PP' durch Q. Da P' der Spiegelpunkt von P bezüglich g ist, ist somit die Behauptung bewiesen. 4 Punkte

c) Gäbe es entgegen der Behauptung doch eine Gerade g mit den genannten Eigenschaften, so läge nach a) der Spiegelpunkt P^* von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit $\overline{PQ}$. Das steht im Widerspruch zur Behauptung. 4 Punkte

Es gibt für die genannten Punkte P^* mithin keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre.

insgesamt 12 Punkte