A 7;I XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7/III/1) Ermittle alle Primzahlen p, die gleichzeitig den folgenden Bedingungen genügen:

(1) $p < 100$.

(2) p läßt sowohl bei Division durch 3 als auch bei Division durch 5 jeweils den Rest 2.

(3) p läßt bei Division durch 4 den Rest 1.

7/III/2) In einer Klasse mit 28 Schülern beteiligen sich alle Schüler am außerunterrichtlichen Sport, und zwar jeder an mindestens einer der folgenden vier Sportarten: Fußball, Leichtathletik, Schwimmen und Turnen, in jeder dieser Sportarten mindestens 1 Schüler. Kein Schüler beteiligt sich an einer Sportart, die hier nicht aufgezählt ist.

Bekannt ist von den Schülern dieser Klasse:

(1) Jeder Schüler betreibt höchstens zwei Sportarten.

(2) Genau 18 Schüler beteiligen sich an genau einer Sportart.

(3) Von den Schülern, die Leichtathletik betreiben, nimmt genau die Hälfte auch noch am Turnen teil.

(4) Jeder Schwimmer betreibt zwei Sportarten, wobei alle anderen Sportarten in gleicher Anzahl vertreten sind.

(5) Die Anzahl der Schüler, die nur turnen, ist gleich der Anzahl der Schüler, die nur Fußball spielen.

(6) Die Menge der Schüler, die sowohl turnen als auch Fußball spielen, ist leer.

(7) Die Anzahl der Schüler, die sowohl Turnen als auch Leichtathletik betreiben, ist gleich der Anzahl derjenigen unter den restlichen Schülern, die sich ebenfalls an zwei Sportarten beteiligen.

Ermittle die Anzahlen aller Schüler dieser Klasse, die sich an

a) Fußball
b) Leichtathletik
c) Schwimmen
d) Turnen

beteiligen!

7/III/3) Gegeben sei ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a.

Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, daß $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $\overline{P_2D} = 3\,\overline{CP_2}$ und auf DA ein Punkt P_3 mit $\overline{P_3A} = 3\,\overline{DP_3}$.

Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.

Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates ABCD und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.

Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_V : A_Q$

a) am größten
b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!

Dabei sei auch zugelassen, daß P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

A 7;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7/III/4) Fritz erzählt:
In unserer Klasse gibt es genau doppelt soviel Mädchen wie Jungen.
Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen.
Ermittle die Anzahl aller Mädchen und die aller Jungen dieser Klasse!

7/III/5) Beweise den folgenden Satz:
Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates ABCD liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A,B,C,D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite.

7/III/6) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4{,}5$ cm, $s_a = 5{,}5$ cm! Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 – 1. Tag –

<u>Achtung</u>: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

7/III/1) <u>Lösung</u>: 5 Punkte

Angenommen, p sei eine Primzahl, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt. Wegen (2) ist dann $p - 2$ sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Da 3 und 5 teilerfremd sind, ist folglich $p - 2$ durch $3 \cdot 5 = 15$ teilbar, d.h. p ist von der Form $n \cdot 15 + 2$ (n eine natürliche Zahl).

Wegen (3) ist p und damit auch n ungerade.

Also können wegen (1) höchstens die Zahlen 17; 47; 77 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Von ihnen ist 77 keine Primzahl, und 47 genügt nicht der Bedingung (3). Also kann nur 17 Lösung der Aufgabe sein. In der Tat erfüllt 17 die Bedingungen (1), (2), (3) und ist damit die einzige derartige Primzahl.

7/III/2) <u>Lösung</u>: 7 Punkte

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Schüler, die sich nur an einer Sportart beteiligen, mit F, L, S, T, und die Schüler, die sich an zwei Sportarten beteiligen, mit FL, FS, FT, LS, LT, ST, jeweils nach den Anfangsbuchstaben der Sportarten.

Dann gilt:

(8) Wegen (2) betreiben genau 18 Schüler je genau eine Sportart.

(9) Wegen (1) und (8), und weil die Klasse 28 Schüler hat, betreiben genau 10 Schüler je genau zwei Sportarten.

(10) Wegen (9) und (7) gibt es genau 5 LT.

(11) Wegen (9), (10), (4) und da es laut Aufgabenstellung mindestens 1 Schwimmer gibt, gibt es genau 1 FS, 1 LS, 1 ST. Gäbe es nämlich je 2 davon, wäre wegen $5 + 6 = 11 > 10$ die mögliche Anzahl bereits überschritten.

(12) Wegen (9), (10), (11) und (6) gibt es genau 2 FL.

(13) Wegen (10) und (3) gibt es genau 10 Leichtathleten, also wegen (10), (11) und (12) genau 2 L.

(14) Wegen (8), (13), (4) und (5) gibt es genau 8 F und 8 T. Folglich gibt es in dieser Klasse genau
11 Fußballer (nämlich 8F, 2FL, 1FS),
10 Leichtathleten (nämlich 2L, 2FL, 1LS, 5LT),
3 Schwimmer (nämlich 1FS, 1LS, 1ST),
14 Turner (nämlich 8T, 5LT, 1ST).

7/III/3) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

Laut Aufgabe gilt:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$ und

$\overline{BP_1} = \overline{P_1C} = \frac{1}{2}$ a,

$\overline{CP_2} = \overline{DP_3} = \frac{1}{4}$ a und

$\overline{AP_3} = \overline{P_2D} = \frac{3}{4}$

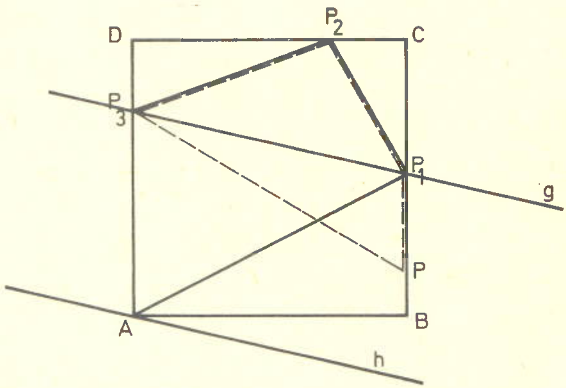

Abb. L 7;3

Das Vieleck $PP_1P_2P_3$ hat genau dann den kleinsten Flächeninhalt, wenn das Dreieck $\triangle P_1PP_3$ (zur Strecke P_1P_3 entartet ist und damit) den kleinsten möglichen Flächeninhalt 0 hat. Dies tritt genau dann ein, wenn

$$P = P_1 \quad \text{oder} \quad P = P_3$$

gilt.

In diesem Falle ist der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ gleich dem des Dreiecks

$$\triangle P_1P_2P_3 .$$

Der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ ist genau dann am größten, wenn der des Dreiecks $\triangle PP_1P_3$ am größten ist, weil die Dreiecke auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt P den größten Abstand von P_1P_3 hat. Zieht man durch A die Parallele h zu der Geraden g durch P_1 und P_3, dann erkennt man, daß unter allen möglichen Lagen des Punktes P dieser genau im Falle P = A den größten Abstand von der fest vorgegebenen Seite P_1P_3 hat; denn für alle anderen Lagen des Punktes P liegt dieser im Innern des von g und h begrenzten Parallelenstreifens oder auf g, weil $\overline{P_3A}$ nach Voraussetzung größer als $\overline{P_1B}$ ist.

a) Den Flächeninhalt A_D des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ erhält man, wenn man vom Flächeninhalt A_Q des Quadrates ABCD die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle P_2P_1C$ und $\triangle P_3P_2D$ sowie den Flächeninhalt des Trapezes P_1P_3AB subtrahiert.
Es gilt daher

$$\begin{aligned} A_D &= a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right) \cdot a \\ &= a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{5a^2}{8} \\ &= \frac{7a^2}{32} . \end{aligned}$$

Das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt in diesem Falle, wegen $A_Q = a^2$ und $A_V = A_D$

$$A_D : A_Q = \frac{7a^2}{32} : a^2 = 7 : 32 .$$

b) Entsprechend kann der Flächeninhalt A_V des Vierecks $P_1P_2P_3A$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned} A_V &= a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \text{ , also} \\ &= a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{19a^2}{32} . \end{aligned}$$

Das gesuchte größte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt also

$$A_V : A_Q = 19 : 32.$$

L 7;II XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

7/III/4) Lösung: 5 Punkte

Man kann sich die Klasse in Dreiergruppen zu je 2 Mädchen und einem Jungen aufgeteilt denken. Wenn jetzt von genau 5 dieser Dreiergruppen je ein Mädchen und ein Junge fortgingen, blieben von ihnen genau 5 Mädchen übrig. Diese können nur dann die restlichen Dreiergruppen in Vierergruppen (zu je 3 Mädchen und 1 Jungen) umwandeln, wenn deren Anzahl ebenfalls 5 beträgt. Also gibt es in der Klasse genau 10 der oben beschriebenen Dreiergruppen, die Klasse hat also genau 30 Schüler, und zwar 20 Mädchen und 10 Jungen.

Anderer Lösungsweg:

Bezeichnet man die Anzahl der Jungen dieser Klasse mit x, dann ist die der Mädchen $2x$. Die Klasse hat mithin wegen $x + 2x = 3x$ insgesamt $3x$ Schüler (Mädchen und Jungen). Wären es je 5 Jungen und Mädchen weniger, so würde die Anzahl aller Schüler $3x - 10$ betragen.

Daher gilt dann laut Aufgabe

$$3x - 10 = (x - 5) + 3(x - 5),$$

woraus man $x = 10$ erhält. Die Klasse hat also genau 30 Schüler, und zwar 20 Mädchen und 10 Jungen.

7/III/5) Lösung: 6 Punkte

Es sei $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$.

Ferner sei P ein Punkt der Quadratfläche, und es gelte:

$\overline{AP} = x_1$, $\overline{BP} = x_2$, $\overline{CP} = x_3$ und $\overline{DP} = x_4$.

Dann gilt unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

(1) $x_1 + x_2 \geqq a$,

(2) $x_2 + x_3 \geqq a$,

(3) $x_3 + x_4 \geqq a$,

(4) $x_4 + x_1 \geqq a$.

Dabei gilt in (1), in (2), in (3) bzw. in (4) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn P auf AB, auf BC, auf CD bzw. auf DA liegt. Da dies bei keiner Lage von P für alle vier Seiten AB, BC, CD, DA gleichzeitig zutrifft, gilt bei keiner Lage von P in allen vier Beziehungen (1), (2), (3), (4) das Gleichheitszeichen.

Somit ergibt sich stets

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 > 4a$ und daher

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2a$, w.z.b.w.

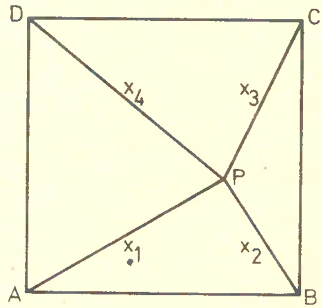

Abb. L 7;5

7/III/6) <u>Lösung</u>: 9 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle$ ABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 7;6). Der Fußpunkt der Höhe durch A auf die Gerade durch B und C sei F, der Mittelpunkt von BC sei D. Dann werde das Teildreieck $\triangle$ ABF aus h_a, c und dem rechten Winkel $\sphericalangle$ AFB konstruiert.

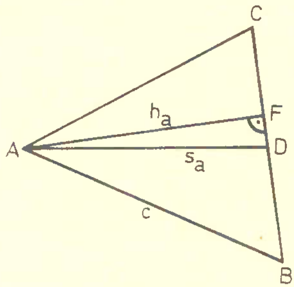

Abb. L 7;6

Punkt D liegt erstens auf dem Kreis mit s_a um A und zweitens auf der Geraden durch F und B.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABF$ mit einem rechten Winkel $\sphericalangle AFB$ und Seiten AB, AF der Länge c bzw. h_a.

(2) Wir ziehen die Gerade durch F und B.

(3) Wir schlagen einen Kreis um A mit s_a. Schneidet er die Gerade durch F und B, so sei D einer der Schnittpunkte.

(4) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{BD}$. Schneidet er die Gerade durch B und F außer in B noch in einem zweiten Punkt, so sei dieser C genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $\overline{AB} = c$, AF die auf der Geraden durch B und C senkrechte Höhe mit $\overline{AF} = h_a$ und D der Mittelpunkt von BC; ferner gilt $\overline{AD} = s_a$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist im (hier vorliegenden) Falle $h_a < c$ bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (2) ebenfalls. Wegen $s_a > h_a$ ergibt 3 genau zwei Schnittpunkte, die D_1 und D_2 genannt seien. Da nicht B, sondern F Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist, ist $\overline{BD_1} \neq \overline{BD_2}$.
Somit ergibt (4) genau zwei verschiedene Schnittpunkte, die C_1 und C_2 genannt seien. Wegen $\overline{BD_1} \neq \overline{BD_2}$ ist auch $\overline{BC_1} \neq \overline{BC_2}$.
[Es existieren folglich zwei Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$, die beide die gleiche entsprechende Höhenlänge, aber verschiedene Längen der zugehörigen Grundseiten haben. Daher haben sie verschiedenen Flächeninhalt, sind also zueinander nicht kongruent.] [1] Infolgedessen existieren bis auf Kongruenz genau zwei verschiedene Dreiecke, die beide allen Bedingungen der Aufgabe genügen (Abb. L 7;6a).

[1] Wenn der in eckigen Klammern stehende Nachweis vom Schüler nicht gebracht wird, ist deswegen kein Punkt abzuziehen.

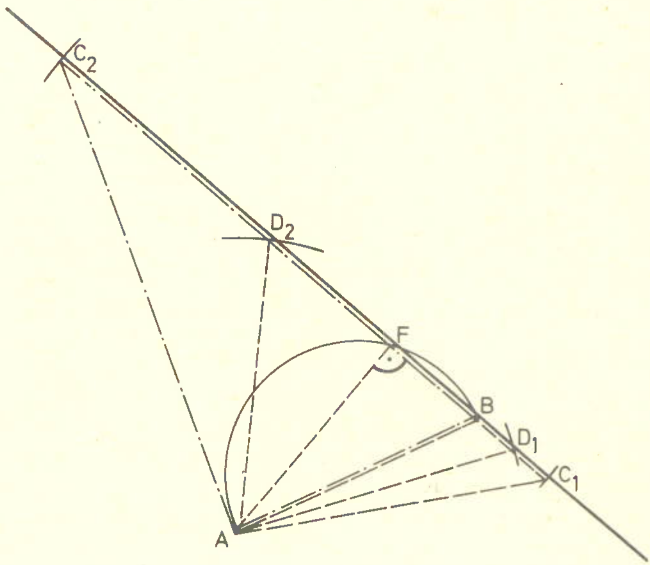

Abb. 7; 6a