A 7

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7/II/1) Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar sind!

7/II/2) Andreas, Birgit und Claudia trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Folgendes ist hierüber bekannt:

(1) Jeder spielte gegen jeden die gleiche Anzahl von Partien.

(2) Keine Partie endete unentschieden(remis).

(3) Andreas gewann genau $\frac{2}{3}$ seiner Spiele.

(4) Birgit gewann genau $\frac{3}{4}$ ihrer Spiele.

(5) Claudia gewann genau ein Spiel.

Ermittle die Anzahl aller Spiele, die in dem Turnier insgesamt ausgetragen wurden!

7/II/3) Beweise folgenden Satz:

In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht.

7/II/4) Konstruiere ein konvexes Viereck ABCD aus

$\overline{BC} = 3{,}5$ cm; $\overline{CD} = 3{,}5$ cm; $\overline{AC} = 5$ cm,

$\overline{\sphericalangle DAB} = 75^\circ$ und $\overline{\sphericalangle ABC} = 120^\circ$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

XI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

7/II/1) **Lösung:** 8 Punkte

Eine Zahl ist genau dann gleichzeitig durch 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12 und 14 teilbar, wenn sie das kgV dieser Zahlen ist. Wegen

$$\begin{aligned}
2 &= 2 &&, \\
3 &= 3 &&, \\
4 &= 2 \cdot 2 &&, \\
6 &= 2 \cdot 3 &&, \\
7 &= 7 &&, \\
8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 &&, \\
9 &= 3 \cdot 3 &&, \\
12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 &&, \\
14 &= 2 \cdot 7 &&
\end{aligned}$$

ist das kgV dieser Zahlen

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$.

Die einzige dreistellige natürliche Zahl, die durch 504 teilbar ist, ist 504.
Daher ist 504 die einzige Zahl, die allen Bedingungen der Aufgabe entspricht.

7/II/2) **Lösung:** 10 Punkte

Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, aus den drei Spielern ein Paar von gegeneinander Spielenden auszuwählen, so ist nach (1) die Anzahl aller Spiele das Dreifache derjenigen Partiezahl, die jeweils ein solches Paar gegeneinander austrug.

(7) Das Doppelte dieser Partienzahl und somit $\frac{2}{3}$ aller Spiele des Turniers beträgt daher die Anzahl derjenigen Spiele, an

denen jeweils einer der Spieler überhaupt teilnahm, d. h. jeder der 3 Spieler nahm an genau $\frac{2}{3}$ aller Spiele teil.

Wegen (3) und (7) gewann infolgedessen Andreas genau $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ aller Spiele und wegen (4) und (7) Birgit genau $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ aller Spiele.

Somit gewannen Andreas und Birgit zusammen wegen $\frac{4}{9} + \frac{1}{2} = \frac{17}{18}$ genau $\frac{17}{18}$ aller Spiele. Daher und weil wegen (2) jedes Spiel von genau einem Spieler gewonnen sein mußte, gewann Claudia genau $\frac{1}{18}$ aller Spiele. Da dies andererseits nach (5) genau ein Spiel war, wurden folglich genau 18 Spiele bei diesem Turnier ausgetragen.

7/II/3) <u>Lösung:</u> 10 Punkte

Weil $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Er sei mit H bezeichnet.

Es seien ferner zwei Höhen des Dreiecks ausgewählt; die Bezeichnung läßt sich dann so wählen, daß dies die von C bzw. A ausgehenden Höhen sind. Ihre Fußpunkte auf AB bzw. BC seien D bzw. E genannt.

Dann gilt:

$\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle AEB$ als rechte Winkel

und $\sphericalangle HAD \cong \sphericalangle EAD$ (H liegt auf AE).

Folglich gilt wegen des Winkelsummensatzes ($\triangle ADH$ bzw. $\triangle BEA$)

$\sphericalangle AHD \cong \sphericalangle ABE$, w.z.b.w.

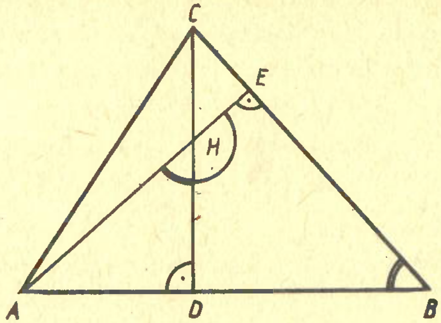

Abb. L 7;3

7/II/4) <u>Lösung:</u> 12 Punkte

(I) Angenommen, ABCD sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt (Abb. L 7;4).

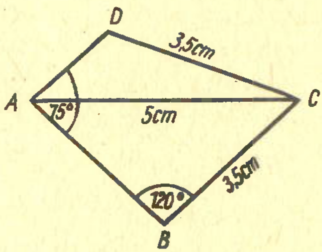

Abb. L 7;4

Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus den Seiten AC, BC und dem der größeren Seite AC gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle ABC$ zu konstruieren. Punkt D muß nun erstens auf dem freien Schenkel eines Winkels der Größe $\sphericalangle BAD$ und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius $\overline{CD}$ liegen. Ferner liegen, da das Viereck konvex ist, B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C.

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Viereck ABCD nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 3{,}5$ und $\overline{\sphericalangle ABC} = 120^\circ$.

(2) Man trägt in A an AB einen Winkel der Größe 75° so an, daß sein freier Schenkel nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

(3) Man schlägt den Kreis um C mit $\overline{CD} = 3{,}5$ cm. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei einer der Schnittpunkte D genannt.

(III) Der Beweis, daß bei je 4 so konstruierten Punkten A, B, C, D die vorgeschriebenen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten, ergibt sich unmittelbar aus (II) und der Umkehrung der Schlüsse in (I).
Ferner folgt aus (II), daß

$$\overline{\sphericalangle DAB} + \overline{\sphericalangle ABC} = 195^\circ > 180^\circ \text{ ist, so}$$

daß keiner der Winkel $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ die Größe 180° erreichen oder überschreiten kann. Daher bilden A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks.

(IV) Die Konstruktion des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen $\overline{AC} > \overline{BC}$ und, weil $\sphericalangle ABC$ der Seite AC gegenüberliegt, nach dem Kriterium (ssw) stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Der Kreis um C mit $\overline{CD}$ schneidet den freien Schenkel des nach (2) konstruierten Winkels von 75° bei den vorgegebenen Werten in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Man erhält also (bis auf Kongruenz) zwei Vierecke, $ABCD_1$ und $ABCD_2$, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen (s. Abb. L 7;4a).

L 7

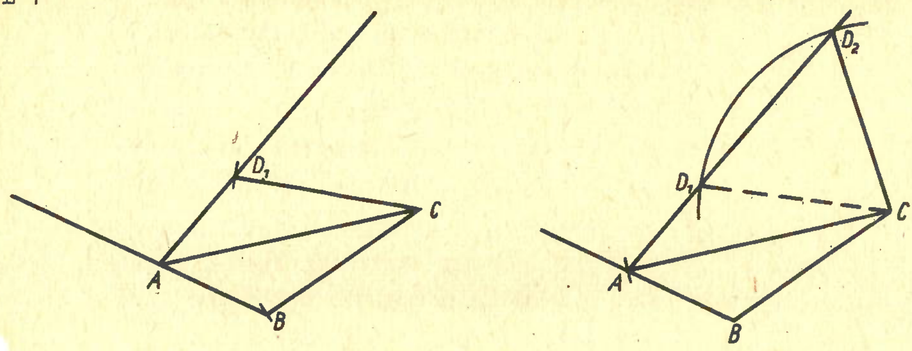

Abb. L 7;4a

Die beiden Vierecke sind nicht kongruent, da sie (wie aus der Figur ersichtlich ist) verschiedenen Flächeninhalt haben.

Olympiadeklasse 7

1. Aufgabe

Erkenntnis, daß die gesuchte Zahl das kgV der gegebenen Teiler ist	2 Punkte
Zerlegung der gegebenen Teiler in Primfaktoren	2 Punkte
Bildung des kgV	2 Punkte
Untersuchung, ob weitere dreistellige natürliche Zahlen in Betracht kommen	1 Punkt
Formulierung des Ergebnisses	1 Punkt
	8 Punkte

2. Aufgabe

Erkenntnis, daß es 3 Möglichkeiten gibt, aus 3 Spielern ein Paar Gegenspieler auszuwählen	1 Punkt
Erkenntnis, daß die Gesamtzahl der Spieler das Dreifache der Partienzahl eines Paares ist	1 Punkt
Erkenntnis, daß jeder der 3 Spieler an $\frac{2}{3}$ aller Spiele teilnahm	2 Punkte
Erkenntnis, daß Andreas $\frac{4}{9}$ aller Spiele gewann	1 Punkt
Erkenntnis, daß Birgit $\frac{1}{2}$ aller Spiele gewann	1 Punkt
Addition der von A und B gewonnenen Spiele	1 Punkt
Schlußfolgerung auf die Anzahl der von C gewonnenen Spiele	2 Punkte
Schlußfolgerung auf die Anzahl der ausgetragenen Spiele	1 Punkt
	10 Punkte

3. Aufgabe

Anfertigung einer Beweisfigur	1 Punkt
Einführung der Bezeichnung für die Höhenfußpunkte und den Höhenschnittpunkt	1 Punkt
Aufstellen der Behauptung	2 Punkte
Erkennen geeigneter Dreiecke zur Beweisführung	2 Punkte
Erkennen des beiden Dreiecken angehörenden rechten Winkels und des gemeinsamen Winkels je 1 Punkt	2 Punkte
Anwenden des Winkelsummensatzes	1 Punkt
Schlußfolgerung auf die Gleichheit des dritten Winkels in beiden Dreiecken	1 Punkt
	10 Punkte

noch Olympiadeklasse 7

4. Aufgabe

(I) Richtige Vorüberlegungsfigur (Planfigur) 1 Punkt

$\triangle$ Angabe der Konstruktionsmöglichkeit des Dreiecks ABC nach Kongruenzsatz SSW 1 Punkt

Angabe der Konstruktion und der Lage des Punktes D 1 Punkt

(II) Richtige Konstruktion ges. 4 Punkte
(Bei Mängel in der Sauberkeit und Exaktheit der Konstruktion je 1 Punkt Abzug)

Konstruktionsbeschreibung ges. 3 Punkte
(Bei fehlerhafter oder unvollständiger Beschreibung Punktabzug)

(III) Beweis: Winkelbetrachtung zur Entscheidung über die Konstruktion eines konvexen Vierecks 1 Punkt

(IV) Determination: Erkennen, daß 2 Vierecke die Bedingungen der Aufgabe erfüllen (einschließlich Begründung) 1 Punkt

12 Punkte