Umlauft

L 11/12;I X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe

11/12/IV/1) <u>Lösung:</u> 5 Punkte

Angenommen, die Ungleichung besitzt für eine reelle Zahl a eine reelle Lösung x. Da beide Wurzeln reell sein sollen, müssen die beiden Bedingungen:

$$a + x \geqq 0, \qquad a - x \geqq 0$$

oder umgeformt:

$$-a \leqq x, \qquad x \leqq a$$

gleichzeitig erfüllt sein. Sie sind mit der Ungleichung

(1) $|x| \leqq a$ äquivalent, die also neben der gegebenen Ungleichung stets erfüllt sein muß.

Es werden nun die folgenden Fälle untersucht:

I. Für $\underline{a < 0}$ kann (1) wegen $|x| \geqq 0$ nicht erfüllt werden, so daß es keine reelle Lösung x gibt.

II. Für $\underline{a = 0}$ muß wegen (1) $x = 0$ gelten. Für $x = 0$ ist aber die gegebene Ungleichung nicht erfüllt; denn es gilt nicht

$$0 + 0 > 0.$$

Somit kann auch in diesem Falle keine reelle Lösung in x existieren.

III. Es bleibt nur noch der Fall $a > 0$ zu untersuchen.
Es sei $\underline{a > 0}$. Dann ergibt sich daraus wegen (1) $a^2 - x^2 \geqq 0$ und aus der gegebenen Ungleichung durch Quadrieren die

dann zu ihr äquivalente Ungleichung:

$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$ oder umgeformt:

(2) $2\sqrt{a^2 - x^2} > a\,(a - 2)$.

Hier wechselt die rechte Seite bei $a = 2$ das Vorzeichen, so daß eine Fallunterscheidung notwendig wird:

1) Es sei $\underline{0 < a < 2}$. Dann gilt $a(a - 2) < 0$. Also ist (2) erfüllt, sobald $a^2 - x^2 \geqq 0$ gilt.
Das trifft für alle x mit (1), d. h. mit $-a \leqq x \leqq a$ zu.
2) Es sei $\underline{a = 2}$. Dann gilt $a(a - 2) = 0$, so daß (2) für $\sqrt{4 - x^2} > 0$, also für $-2 < x < 2$ und nur für diese erfüllt ist.
3) Es sei $\underline{a > 2}$. Dann gilt $a(a - 2) > 0$. Aus (2) folgt die Ungleichung
$4(a^2 - x^2) > a^2(a - 2)^2$ oder

(3) $x^2 < \frac{1}{4}\, a^3(4 - a)$.

(<u>Anmerkung</u>: Ist (3) erfüllt, so ist $4(a^2 - x^2) > a^2(a - 2)^2 \geqq 0$, also die Bedingung (1), ja sogar (4) $|x| < a$ von selbst mit erfüllt.)

Da die rechte Seite von (3) positiv sein muß, kann (3) für $a \geqq 4$ nie erfüllt sein. Somit bleibt nur noch der Fall

$\underline{2 < a < 4}$ zu untersuchen.

Tatsächlich sind unter dieser Voraussetzung alle x mit

(5) $|x| < \frac{a}{2}\sqrt{a\,(4 - a)}$ und nur diese

Lösungen der gegebenen Ungleichung, da dann (5) mit (3) äquivalent ist.

So ergibt sich folgende Übersicht:

Parameterwerte	Zugehörige Lösungen
$a \leqq 0$	keine
$0 < a < 2$	$-a \leqq x \leqq a$
$a = 2$	$-2 < x < 2$
$2 < a < 4$	$-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{(4-a)a}$
$a \geqq 4$	keine.

11/12/IV/2) Lösung: 6 Punkte

I. Im Falle $n = 0$ ist $F(x) = f(x)$ und daher die Behauptung richtig.

II. Im Falle $n > 0$ hat F den gleichen Grad n wie f, und es gilt (wegen $f^{(n+1)}(x)=0$):

$$h \cdot F'(x) = F(x) - f(x) \qquad (1).$$

Da f nach Voraussetzung keine reellen Nullstellen hat, muß n gerade sein; denn jede ganzrationale Funktion von ungeradem Grade hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Angenommen, F hätte eine reelle Nullstelle x_1.
Dann ließe sich F durch $(x - x_1)$ dividieren, und man erhielte eine ganzrationale Funktion von dem ungeraden Grade $(n - 1)$.

Diese Funktion hätte daher mindestens eine reelle Nullstelle.

Somit müßte F mindestens zwei reelle Nullstellen, etwa x_1 und x_2 haben.
Dabei könnten, da $F(x)$ nur endlich viele Nullstellen besitzen kann, x_1 und x_2 so gewählt werden, daß $x_1 \leqq x_2$ gilt und zwischen x_1 und x_2 keine weiteren Nullstellen von $F(x)$ liegen.

Es gilt sogar $x_1 \neq x_2$; denn für $x_1 = x_2$ wäre neben $F(x_1) = 0$ auch $F'(x_1) = 0$, so daß daraus wegen (1) $f(x_1) = 0$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung des zu beweisenden Satzes.[1)]

Dann folgte aus

$$h \cdot F'(x_1) = - f(x_1) \quad \text{sowie}$$

$$h \cdot F'(x_2) = - f(x_2),$$

daß auch die Vorzeichen von $F'(x_1)$ und $F'(x_2)$ übereinstimmen müßten, weil laut Voraussetzung f keine reelle Nullstelle und demzufolge überall das gleiche Vorzeichen hat.

Da zwischen x_1 und x_2 keine weiteren reellen Nullstellen von F liegen, ist das nicht möglich. F(x) hätte nämlich in einer genügend kleinen rechtsseitigen Umgebung von x_1 dasselbe Vorzeichen und in einer genügend kleinen linksseitigen Umgebung von x_2 das entgegengesetzte Vorzeichen wie F'(x), hätte daher also zwischen x_1 und x_2 eine weitere Nullstelle.

Also war die Annahme, F hätte mindestens eine reelle Nullstelle, falsch. Damit ist der Satz bewiesen.

---

1) <u>Beweis:</u> Ist $x_1 = x_2$, so läßt sich F(x) in der Form $F(x) = (x - x_1)^2 \; F_1(x)$ [$F_1(x)$ Polynom (n-2)ten Grades] darstellen, und es gilt $F'(x) = 2(x - x_1)\, F_1(x) + (x - x_1)^2 F_1'(x)$, also $F'(x_1) = 0$.

11/12/IV/3) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

Wir bezeichnen die konvexen Vielecksflächen mit V_1, V_2, V_3, V_4. Nach Voraussetzung existieren Punkte P_i $(i = 1,2,3,4)$ mit

$P_1 \in V_2 \cap V_3 \cap V_4$; $P_2 \in V_3 \cap V_4 \cap V_1$;

$P_3 \in V_4 \cap V_1 \cap V_2$; $P_4 \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$.

Nun gilt der Satz:

Liegen drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte A, B, C in einer konvexen Vielecksfläche, dann liegt auch die Fläche des Dreiecks $\triangle$ ABC vollständig in dieser Vielecksfläche. 1)

Es seien nun

F_4 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_1 P_2 P_3$

F_1 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_2 P_3 P_4$

F_2 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_3 P_4 P_1$

F_3 die Fläche des Dreiecks $\triangle P_4 P_1 P_2$.

Dann gilt:

$F_i \subseteq V_i \quad (i = 1,2,3,4).$ (1)

Für die gegenseitige Lage der Punkte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ muß einer der folgenden Fälle eintreten:

a) Entweder gehört einer der vier Punkte der durch die anderen drei Punkte bestimmten Dreiecksfläche an oder

---

1) <u>Beweis:</u> Da die Vielecke konvex sind, verläuft die Verbindungsstrecke je zweier in der gleichen Vielecksfläche gelegener Punkte ganz in dieser Vielecksfläche. Daher liegen die Seiten des Dreiecks $\triangle$ ABC und damit auch die Verbindungsstrecke je zweier auf den Seiten gelegener Punkte ganz in dieser Vielecksfläche.

b) lie vier Punkte sind die Eckpunkte eines konvexen Vierecks.

Im Falle a) sei o.B.d.A. der Punkt P_1 ein Punkt der Fläche F_1. Wegen $F_1 \subseteq V_1$ gilt dann $P_1 \in V_1$, d. h. P_1 ist Element aller vier Vielecksflächen.
Im Falle b) sei Q der Schnittpunkt der Diagonalen des konvexen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$.
Dann liegt Q auf je einer Seite der durch jeweils drei der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gebildeten Dreiecke, gehört mithin allen Dreiecksflächen

F_i (i = 1, 2, 3, 4) und damit wegen (1)

auch allen konvexen Vielecksflächen

V_i (i = 1, 2, 3, 4) an.
Damit ist der Satz bewiesen.

L. 11/12;II X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

11/12/IV/4) Lösung:

Angenommen, (x, y, z) sei eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2), (3).
Dann erhält man durch Multiplikation mit a_2 bzw. a_1 und durch Subtraktion aus den Gleichungen (1) und (2)

$$a_2x - a_1b_2z = a_2b_1 - a_1a_3.$$

Hieraus und aus (3) erhält man durch Multiplikation mit a_4 bzw. a_1b_2

$$x(a_2a_4+a_1b_2b_3)=a_2a_4b_1-a_1a_3a_4+a_1b_2b_4. \quad (4)$$

Analog erhält man

$$y(a_2a_4 + a_1b_2b_3) = a_3a_4-b_2b_4 + b_1b_2b_3, \quad (5)$$

$$z(a_2a_4 + a_1b_2b_3) = a_1a_3b_3-a_2b_1b_3+a_2b_4. \quad (6)$$

Daraus folgt, daß das gegebene Gleichungssystem sicher dann genau eine ganzzahlige Lösung hat, wenn

$$a_2a_4 + a_1b_2b_3 = D \text{ gleich } 1 \text{ oder } -1$$

ist; denn die Terme auf den rechten Seiten von (4), (5), (6) sind ganzzahlig und daher ist es für $|D| = 1$ auch die Lösung (x, y, z) des gegebenen Gleichungssystems.
A kann also sein Ziel erreichen, wenn er so spielt, daß $|D| = 1$ wird.

L. 11/12;II

a) Das läßt sich erreichen, wenn A z. B. zunächst 3 Punkte

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$ und a_3 beliebig

ganzzahlig wählt. Denn dann wird

$$D = a_4 - b_2 b_3 \text{ , und}$$

wählt A nun noch $a_4 = b_2 b_3 + 1$, so wird

$$D = 1.$$

b) A kann aber auch von vornherein die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ so festlegen, daß $|D| = 1$ wird, unabhängig von der Wahl der Koeffizienten $b_1, \ldots, b_4$ durch B, daß er also stets gewinnt. Er erreicht dies z. B., wenn er $a_1 = 0$, $|a_2| = 1$, $|a_4| = 1$ und a_3 beliebig ganzzahlig wählt; denn dann wird 3 Punkte

$$|D| = |a_2 a_4 + a_1 b_2 b_3| = 1.$$

insgesamt 6 Punkte

11/12/IV/5) Lösung: 7 Punkte

Sei $A_0 A_1 \ldots A_n$ ein konvexer Polygonzug mit $A_0 \neq A_n$, g die durch A_0 und A_n verlaufende Gerade. Laut Voraussetzung liegen alle Eckpunkte A_i ($i=1 \ldots n-1$) des Polygonzuges auf derselben Seite von g.

Der Punkt B des Polygonzuges halbiere diesen Polygonzug der Länge nach.

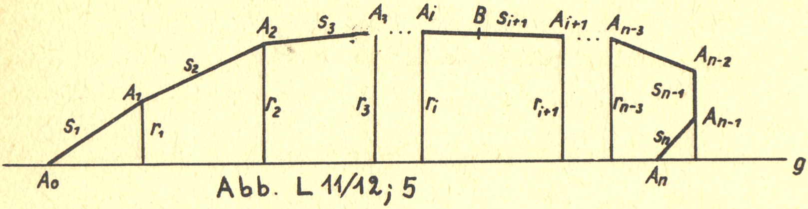

Abb. L 11/12; 5

Die Rotationsfläche ist aus Mänteln von Kegelstümpfen bzw. deren Entartungen (Mäntel von Kegeln, Zylindern bzw. Kreisflächen, Kreisringflächen) zusammengesetzt. Damit läßt sich der Flächeninhalt F_j des durch Rotation von $A_{j-1}A_j$ um g entstehenden Mantels des Kegelstumpfes berechnen nach

$$F_j = \pi \cdot s_j(r_j + r_{j-1}), \qquad (1)$$

wobei s_j die Länge der Mantellinie $A_{j-1}A_j$ und r_{j-1} bzw. r den Abstand der Punkte A_{j-1} bzw. A_j von g angeben.

Es sei t_j die Länge des Polygonzuges $A_0A_1\ldots A_j$. Da r_j der Abstand des Punktes A_j von g ist, gilt

$$t_j \geqq r_j \quad \text{für alle } 0 \leqq j \leqq n. \qquad (2)$$

Wegen $s_j = t_j - t_{j-1}$ erhält man aus (1) und (2)

$$F_j = \pi \cdot s_j(r_j + r_{j-1}) \leqq \pi \cdot s_j(t_j + t_{j-1})$$
$$= \pi \cdot (t_j^2 - t_{j-1}^2). \qquad (3)$$

Dabei stellt der Term

$\pi \cdot (t_j^2 - t_{j-1}^2)$ den Flächeninhalt

eines konzentrischen Kreisringes mit den Radien t_j und t_{j-1} dar.

Wir betrachten den Flächeninhalt G der durch Rotation des Polygonzuges $A_o A_1 \ldots B$ um g erzeugten Fläche.

G ist gleich der Summe von $F_1, \ldots, F_i$ und dem Flächeninhalt F_B der von $A_i B$ erzeugten Rotationsfläche. Aus der Bemerkung zu (3) folgt, daß dann G nicht größer als die Summe der Flächeninhalte der Kreisringe mit den Radien

t_j, t_{j-1} $(1 \leqq j \leqq i)$ bzw.

t_i, t_B mit $t_B = \frac{s}{2}$, d. h. nicht größer als die Fläche des Kreises mit dem Radius $\frac{s}{2}$ ist, daß also

$$G \leqq \pi \cdot \frac{s^2}{4} \text{ gilt.} \qquad (4)$$

Für den Flächeninhalt G' der durch den Polygonzug $B\, A_{i+1} \ldots A_n$ erzeugten Rotationsfläche erhalten wir analog

$$G' \leqq \pi \cdot \frac{s^2}{4}\,. \qquad (5)$$

Damit gilt

$$F = G + G' \leqq \pi \cdot \frac{s^2}{2}. \qquad (6)$$

11/12/IV/6.1.

<u>Lösung:</u> 8 Punkte

Es ist zu untersuchen, ob A den Bedingungen (1) bis (3) genügt.

1. Es seien $f(x) = a_o + a_1 x$ mit $a \neq 0$ und $g(x) = b_o + b_1 x$ mit $b_1 \neq 0$ zwei Elemente aus $\mathfrak{P}$.

   Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) \circ g(x) &= g\,(f(x)) \\ &= g(a_o + a_1 x) \\ &= b_o + b_1(a_o + a_1 x) \\ &= b_o + a_o b_1 + a_1 b_1 x. \end{aligned}$$

$f(x) \circ g(x)$ ist also wegen $a_1 b_1 \neq 0$ ein Polynom 1. Grades mit rationalen Koeffizienten und daher Element von $\mathfrak{P}$. Da ferner $f(x) \circ g(x)$ eindeutig bestimmt ist, ist die Bedingung (1) erfüllt.

2. Für drei beliebige Elemente

$$f(x) = a_o + a_1 x,$$

$$g(x) = b_o + b_1 x,$$

$$h(x) = c_o + c_1 x \quad \text{mit}$$

$$a_1,\ b_1,\ c_1 \neq 0 \quad \text{gilt:}$$

$$f(x) \circ g(x) = b_o + a_o b_1 + a_1 b_1 x \quad \text{und}$$

$$g(x) \circ h(x) = c_o + b_o c_1 + b_1 c_1 x.$$

Weiter gilt

$$[f(x) \circ g(x)] \circ h(x) = c_o + c_1 (b_o + a_o b_1 + a_1 b_1 x)$$
$$= c_o + b_o c_1 + a_o b_1 c_1 + a_1 b_1 c_1 x \qquad (4)$$

sowie

$$f(x) \circ [g(x) \circ h(x)] = c_o + c_1 [b_o + b_1 (a_o + a_1 x)]$$
$$= c_o + b_o c_1 + a_o b_1 c_1 + a_1 b_1 c_1 x. \qquad (5)$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten von (4) und (5) folgt nun unmittelbar, daß A assoziativ ist.[1)]

---

1) Der hier gegebene Beweis stellt eine Zurückführung der Behauptung auf einfache Rechengesetze für rationale Zahlen dar. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß A nicht kommutativ ist; denn es gilt nicht immer

$$f(x) \circ g(x) = g(x) \circ f(x).$$

3. Es seien f(x) und g(x) zwei beliebige Elemente aus $\mathfrak{P}$.
Wir nehmen zunächst an, daß ein Element

$\varphi(x) = u_o + u_1 x$

in $\mathfrak{P}$ existiert, so daß

$$f(x) \circ \varphi(x) = g(x) \quad \text{gilt.} \qquad (6)$$

Dann gilt

$$u_o + u_1(a_o + a_1 x) = b_o + b_1 x \ ,$$

also

$$u_o + u_1 a_o = b_o \text{ und } u_1 a_1 = b_1 \ , \quad (7)$$

mithin wegen $a_1 \neq 0$

$$u_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ und } u_o = \frac{a_1 b_o - a_o b_1}{a_1} \ .$$

Setzt man umgekehrt diese Werte in die Gleichungen (7) ein, so erkennt man, daß diese Gleichungen und somit auch die Gleichung (6) erfüllt sind, d. h., die Gleichung (6) ist stets lösbar, und zwar durch

$$\varphi(x) = \frac{a_1 b_o - a_o b_1}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} x \ .$$

Analog stellt man fest, daß auch die Gleichung

$$\psi(x) \circ f(x) = g(x)$$

stets lösbar ist, Sie hat die Lösung

$$\psi(x) = \frac{b_o - a_o}{a_1} + \frac{b_1}{a_1} x.$$

Daher ist auch die Bedingung (3) erfüllt.
Weil die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind, ist also $\mathfrak{P}$ eine Gruppe bezüglich A.

11/12/IV/6.2. Lösung: 2 Punkte

a) Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt:

$$(r - y)^2 + x^2 = r^2 \qquad (1)$$

Daraus erhält man

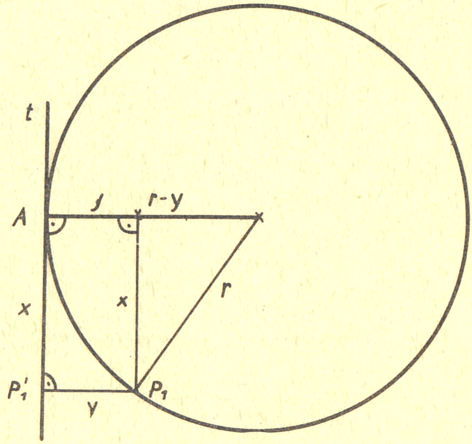

Abb. L 11/12: 6.2

$r^2 - 2ry + y^2 + x^2 = r^2$, wegen

$y(< r) < 2\,r$ also

$$y = \frac{x^2}{2r - y}, \text{ w.z.b.w.}$$

b) Unter Beachtung von $y < r$ erhält man aus (1), d. h. aus 6 Punkte

$(r - y)^2 = r^2 - x^2$ die Gleichung

$r - y = \sqrt{r^2 - x^2}$ und weiter

$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Für alle x mit $0 < x < r$ gilt somit

$$\frac{y_1}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{r^2 - r\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{x}{r} = u \quad (r \neq 0, \quad u \neq 0)$$

und erhalten

$$\frac{y_1}{y} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{1 - \sqrt{1 - u^2}}$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - u^2}),$$

also

$$\frac{y - y_1}{y} = 1 - \frac{y_1}{y}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - u^2}) > 0.$$

Wegen $y > 0$ und $\sqrt{1 - u^2} < 1$ folgt daraus

$$y - y_1 > 0,$$

also

$$\delta = \frac{|y - y_1|}{y} = \frac{y - y_1}{y}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - u^2}).$$

Demnach ist die Forderung $\delta \leqq \frac{1}{1000}$ gleichbedeutend mit

$$1 - \sqrt{1 - u^2} \leqq \frac{1}{500}$$

$$\frac{499}{500} \leqq \sqrt{1 - u^2},$$

$$u^2 \leqq \frac{500^2 - 499^2}{500^2} = \frac{999}{500^2}.$$

Bestimmt man daher n als <u>die kleinste natürliche Zahl mit</u>

(2) $$\frac{1}{n^2} \leqq \frac{999}{500^2},$$

so ist folglich dieses n die gesuchte kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß für alle $0 < x \leqq \frac{r}{n}$ die Bedingung $\delta \leqq \frac{1}{1000}$ erfüllt ist.

Die Berechnung von n kann z. B. so erfolgen:

<u>1. Möglichkeit:</u>

Man schätzt die Wurzel

$$\sqrt{\frac{500^2}{999}} = \frac{500}{333}\sqrt{111} \quad \text{auf Grund von}$$

$$10{,}5 < \sqrt{111} < 10{,}6 \quad \text{ab und erhält}$$

$$15 < \frac{5250}{333} < \frac{500}{333}\sqrt{111} < \frac{5300}{333} < 16.$$

<u>2. Möglichkeit:</u>

(Vermeidung des Wurzelziehens durch Quadrieren.)

Aus (2) folgt $n^2 > \frac{500^2}{1000} = 250 > 15^2$;

also kann eine natürliche Zahl höchstens dann (2) erfüllen, wenn sie größer als 15 ist. Da man andererseits in der Tat

$$999 \cdot 16^2 = 256000 - 256 > 500^2$$

findet, also die Richtigkeit von (2) für n = 16, bestätigt, so ist n = 16 die gesuchte kleinste natürliche Zahl mit (2).

---

insgesamt 8 Punkte