A 11/12; I X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/III/1) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

$$\sin^2\gamma \geq \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

11/12/III/2) In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ε der folgendermaßen definierte Punkt P' in ε zugeordnet wird:

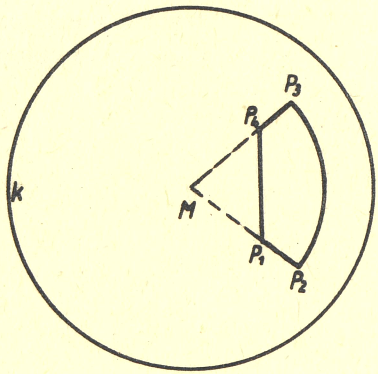

Abb. A 11/12;2

(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.

Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:
P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl.

Es gelte $\overline{MP_1} = \overline{MP_4} < \overline{MP_2} = \overline{MP_3}$.

30 04 49-1

Der Winkel $\sphericalangle P_2MP_3$ sei kleiner als 180°.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2M\,P_3$ gelegenen Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.
Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal)!

11/12/III/3) Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^6 + 4}$$ definierte Funktion.

Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten f(x) ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

A 11/12;II X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/III/4) Es sind alle ganz-rationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen.
Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann fest gehalten zu denkende reelle Zahl.

11/12/III/5) Es seien zwei nicht in derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben. Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, daß P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.

Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ε genau dann parallel, wenn es in ε eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

30 04 49-1

11/12/III/6) Es sei $\mathfrak{M}_1$ die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y \geqq 0 \\ (2) & y - 2x \leqq 1 \\ (3) & y + 2x \leqq 1 \end{array}\right\} \qquad (x,y \text{ reell})$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei $\mathfrak{L}_n$ die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(4) \qquad \frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$(5) \qquad -\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}$$

a) Stellen Sie $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3, \mathfrak{L}_4$ graphisch dar!

b) Es ist zu beweisen, daß es einen Punkt $P \in \mathfrak{M}_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen $\mathfrak{L}_n$ enthalten ist.

c) Es sei $\mathfrak{M}_2$ die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und (6) $y \leqq 1 - \frac{1}{1000}$ gilt.

Es ist zu beweisen, daß es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, daß jedes Element von $\mathfrak{M}_2$ auch Element der Vereinigungsmenge $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{L}_{n_1}$ ist.

Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt!

L 11/12;I X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

11/12/III/1) <u>Lösung:</u> 5 Punkte

Es gilt:

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta) \,,$$

sowie wegen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{2} \left[\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\pi - 2\gamma)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left|\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos 2\gamma\right| \,,$$

also wegen $\cos(2\alpha - 2\beta) \leqq 1$

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \leqq \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma) = \sin^2\gamma \,,$$

w.z.b.w.

11/12/III/2) <u>Lösung:</u> 6 Punkte

(I) Die Konstruktion von P_1' kann so erfolgen: Man errichtet in P_1 auf MP_1 die Senkrechte. Einer ihrer Schnittpunkte mit k sei T. Nun errichtet man in T auf MT die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Strahl MP_1 sei P_1'.

<u>Beweis:</u> Für den so konstruierten Punkt P_1' gilt nach dem Satz des Euklid:

$\overline{MP_1} \cdot \overline{MP_1'} = \overline{MT}^2 = r^2$, wie es verlangt war.

II) Analog konstruiert man P_2', P_3' und P_4'. Dabei wird $\overline{MP_1'} = \overline{MP_4'} > \overline{MP_2'} = \overline{MP_3'}$; ferner enthalten die Strahlen MP_2 bzw. MP_3 die Strecken $P_1'P_2'$ bzw. $P_3'P_4'$, und diese Strecken sind die Bilder der Strecken P_1P_2 bzw. P_3P_4 .

Beweis, z.B. für $P_1'P_2'$:

Durchläuft P alle Punkte zwischen P_1 und P_2, d.h. $\overline{MP}$ alle Werte zwischen $\overline{MP_1}$ und $\overline{MP_2}$, so durchläuft $\overline{MP'}$ nach (2) alle Werte zwischen $\overline{MP_1'}$ und $\overline{MP_2'}$.

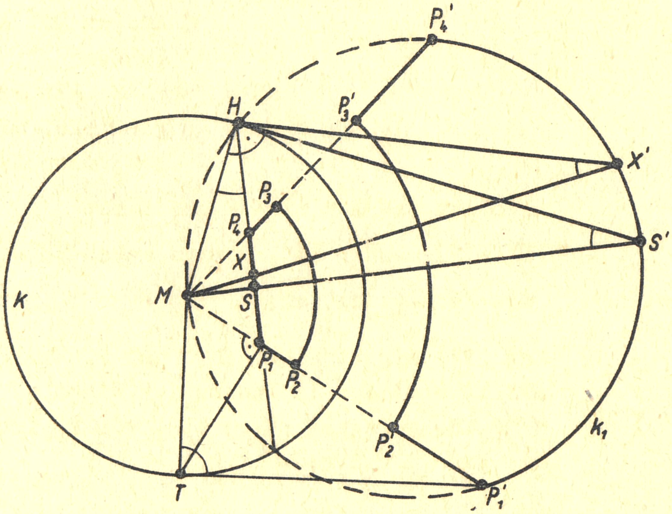

Abb. 11/12;2

(III) Aus (2) folgt weiter: Der im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2MP_3$ gelegene Bogen $\overset{\frown}{P_2'P_3'}$ des Kreises um M durch P_2' ist das Bild des Bogens $\overset{\frown}{P_2P_3}$ des gegebenen Kurvenzuges.

(IV) Der Schnittpunkt von P_1P_4 mit der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle P_2 MP_3$ sei S. Wie in (I) werde das Bild S' von S konstruiert: Einer der Schnittpunkte der die Strecke P_1P_4 enthaltenden Geraden mit k sei H. Man errichtet in H auf MH die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem von M ausgehenden Strahl MS ist dann S'.

Aus dieser Konstruktion folgt, daß H auf dem über MS' als Durchmesser konstruierten Kreis k liegt.

Ist nun X irgendein Punkt der Sehne durch H und S, dann ist der Schnittpunkt des von M ausgehenden Strahles MX mit k_1 der Spiegelpunkt X' von X.

Beweis: Es gilt $\sphericalangle MHX \cong \sphericalangle MS'H$ (da beide $\sphericalangle HMS$ zu 90° ergänzen)

$\sphericalangle MS'H \cong \sphericalangle MX'H$ (als Peripheriewinkel über dem Bogen $\overset{\frown}{MH}$)

Also ist $\triangle MHX \sim \triangle MX'H$ und damit

$\overline{MX} : \overline{MH} = \overline{MH} : \overline{MX'}$, woraus wegen $\overline{MH} = r$ die Behauptung folgt.

(V) Aus (IV) ergibt sich: (P_1' und P_4' liegen auf k_1 und) der im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2MP_3$ gelegene Bogen $\overset{\frown}{P_1'P_4'}$ von k_1 ist das Bild der Strecke P_1P_4.

<u>Bemerkung:</u>
Die Beweise dafür, daß die angegebenen Teilkurven $P_1'P_2'$ usw. die Bilder der Teilkurven P_1P_2 usw. sind, können auch mit Hilfe der analytischen Geometrie geführt werden.
Besonders vorteilhaft ist dies zur Ermittlung des Bildes von P_1P_4:
Man wähle etwa M als Koordinatenursprung, als positive x-Achse die Winkelhalbierende von $\sphericalangle P_2MP_3$ und die positive y-Achse so, daß P_3 im I. Quadranten liegt.
Die Koordinaten von P_i, den Spiegelpunkten P_i' ($i = 1,2,3,4$), allgemein von irgendeinem Punkt $P \neq M$ und seinem Spiegelpunkt P' seien x_i, y_i

bzw. x_i', y_i' $(i = 1,2,3,4)$ bzw. x,y bzw. x',y' genannt.

Dann gilt $x = \frac{x' r^2}{x'^2 + y'^2}$, $y = \frac{y' r^2}{x'^2 + y'^2}$;

denn es ist auch $P' \neq M$ also $x'^2 + y'^2 \neq 0$,

und ist (zu gegebenen x', y') P derjenige Punkt, für den die genannten Gleichungen gelten, so liegen P, P' wegen

$x : x' = y : y' \; (= \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}) > 0$ auf

einem und demselben Strahl durch M, und es gilt auch

$$\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(x'^2 + y'^2) r^4}{(x'^2 + y'^2)^2}} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2 .$$

Die Gerade durch P_1 und P_4 hat nun die Gleichung

$$x = x_1 ,$$

und daher hat ihr Spiegelbild die Gleichung

$$\frac{x' r^2}{x'^2 + y'^2} = x_1 .$$

Diese Gleichung ist äquivalent damit, daß $x'^2 + y'^2 \neq 0$ und

$$x'^2 - \frac{r^2}{x_1} x' + y'^2 = 0,$$

d.h.

$$(x' - \frac{1}{2} \frac{r^2}{x_1})^2 + y'^2 = (\frac{1}{2} \frac{r^2}{x_1})^2$$

gelten. Daher ist das Spiegelbild der Kreis über dem Durchmesser $(0,0)$ $(\frac{r^2}{x_1}, 0)$ mit Ausnahme des Punktes $(0,0)$.

11/12/III/3) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

(I) Es gilt: $f(0) = \frac{1}{4}$ und für alle x wegen $1 - x^2 \leqq 1$; $x^6 + 4 \geqq 4$

$f(x) \leqq \frac{1}{4}$, d.h., die Funktion f nimmt $\frac{1}{4}$ als ihren größten Wert an.

(II) Es gilt weiter:

$f(x) \geqq 0$ für alle x mit $x^2 \leqq 1$

$f(x) < 0$ für alle x mit $x^2 > 1$,

d.h. der kleinste Wert wird, falls er überhaupt existiert, für ein x mit $x^2 > 1$ angenommen.

Für je ein x mit $x^2 > 1$ setzen wir $x^2 - 1 = t$; dann wird $t > 0$ und

$x^6 + 4 = (t+1)^3 + 4 = t^3 + 3t^2 + 3t + 5$;

also

$$f(x) = \frac{-t}{t^3+3t^2+3t+5}$$

$$= \frac{-t}{t(t^2-2t+1)+5t^2+2t+5}$$

$$= \frac{-t}{(t+5)(t^2-2t+1)+12t}$$

$$= \frac{-1}{(1+\frac{5}{t})(t-1)^2 + 12}$$

Wegen $1 + \frac{5}{t} > 0$ und $(t-1)^2 \geqq 0$ für alle $t > 0$ folgt hieraus $f(x) \geqq -\frac{1}{12}$ für alle x mit $x^2 > 1$ (und daher nach dem oben Bemerkten für alle x), und das Gleichheitszeichen gilt genau für $t = 1$, d.h. für alle x mit $x^2 = 2$. Somit nimmt f als kleinsten Wert $-\frac{1}{12}$ an.

Bemerkung:

Viele Schüler werden die Lösung mit Hilfe von Differentialrechnung versuchen.

Man erhält $f'(x) = \dfrac{2x(2x^6 - 3x^4 - 4)}{(x^6 - 4)^2}$,

$$f''(x) = \frac{2(-10x^{12}+21x^{10}+100x^6-60x^4-16)}{(x^6+4)^3}$$

und $f'(x) = 0$ genau für $x_1 = 0$ (1) oder

$x^6 - \frac{3x^4}{2} - 2 = 0$ (2).

Als eine Lösung der kubischen Gleichung (2) für die Variable x^2 kann man z.B. durch Probieren $x^2 = 2$ finden, und dann führt die Division durch $x^2 - 2$ auf die Gleichung

$$x^6 - \frac{3}{2}x^4 - 2 = (x^2-2)(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1) = 0.$$

Wegen $x^4+\frac{1}{2}x^2 + 1 = (x^2+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16} > 0$

für alle reellen x hat die Gleichung (2) also genau die reellen Lösungen

$x_2 = \sqrt{2}$ und $x_3 = -\sqrt{2}$.

$f'(x)$ hat also genau die Nullstellen

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, und nur an diesen Stellen können – wenn überhaupt – Extremwerte vorliegen.

Die Vorzeichenbestimmung von $f''(x_i)$ $(i = 1,2,3)$ würde zunächst nur die Aussagen über das lokale Verhalten von $f(x)$ an diesen Stellen ergeben. (Bei x_1 lokales

Maximum, bei x_2 und x_3 lokale Minima). Die gesuchten globalen Aussagen kann man z.B. folgendermaßen erhalten:

1. Zurückführung auf ein endliches abgeschlossenes Intervall:

   Es ist $f(x_1) = \frac{1}{4}$, $f(x_2) = f(x_3) = -\frac{1}{12}$.

   Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

   gibt es eine Zahl $z > \sqrt{2}$, so daß

   (✱) $-\frac{1}{12} < f(x) < \frac{1}{4}$ für alle $x \leqq -z$

   und für alle $x \geqq z$ gilt.

   Durchläuft x nun das Intervall $[-z, z]$, so gibt es wegen der Stetigkeit unter den dann auftretenden Funktionswerten f(x) einen größten und einen kleinsten, und diese können nur an den Stellen x_1, x_2, x_3, z, -z angenommen werden. Ein Vergleich der Funktionswerte an diesen Stellen zeigt, daß $\frac{1}{4}$ bzw. $-\frac{1}{12}$ der größte bzw. kleinste Funktionswert von f(x) im Intervall $[-z, z]$ sind, und aus (✱) folgt, daß sie es auch im Intervall $(-\infty, +\infty)$ sind.

2. Die globale Aussage über die Minima kann auch durch Monotonieuntersuchung gewonnen werden:

   Im Intervall $\left\{\begin{matrix} (-\infty, -\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}, 0) \\ (0, \sqrt{2}) \\ (\sqrt{2}, +\infty) \end{matrix}\right\}$ ist $f'(x) \left\{\begin{matrix} < 0 \\ > 0 \\ < 0 \\ > 0 \end{matrix}\right\}$, also f(x) im Intervall

$$\left\{\begin{matrix} (-\infty\ ,\ -\sqrt{2}] \\ [-\sqrt{2}\ ,\ 0] \\ [\ 0\ ,\ \sqrt{2}] \\ [\ \sqrt{2}\ ,\ +\infty\ ) \end{matrix}\right\} \quad \text{streng monoton} \quad \left\{\begin{matrix} \text{fallend} \\ \text{steigend} \\ \text{fallend} \\ \text{steigend} \end{matrix}\right\}.$$

Daher ist $f(x) > f(-\sqrt{2})$ für alle

$x \neq -\sqrt{2}$ aus $(-\infty,\ 0]$

und $f(x) > f(\sqrt{2})$ für alle $x \neq \sqrt{2}$ aus

$[0,\ +\infty)$.

Somit ist $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2})$ der kleinste Funktionswert.

3. Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ gilt auf-

grund der Monotonie in $(-\infty,\ -\sqrt{2}]$ und

in $[\sqrt{2}\ ,+\infty)$: $f(x) < 0$

und in $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$: $f(x) \leqq f(x_1) = \frac{1}{4}$

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

11/12/III/4) Lösung: 6 Punkte

(1) Es sei $t = 0$. Dann ist die gegebene Gleichung mit $f(0) = 0$ gleichbedeutend, d.h. sie wird genau von allen denjenigen ganz-rationalen Funktionen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

erfüllt, in denen $a_o = 0$ ist.

(2) Es sei $t = 1$, Dann ist die gegebene Gleichung mit $f(x) = f(x)$ gleichbedeutend. Diese Gleichung wird von allen Funktionen erfüllt.

(3) Es sei $t = -1$. Dann ist die gegebene Gleichung mit $f(-x) = -f(x)$ gleichbedeutend. Diese Gleichung wird von allen ungeraden Funktionen erfüllt, d.h. im Falle der ganz-rationalen Funktionen genau von allen ungeraden ganz-rationalen Funktionen.

(4) Es sei t eine von 0; 1 und -1 verschiedene reelle Zahl. Dann kann man für ganz-rationale Funktionen die gegebene Gleichung in folgender Form schreiben

$$a_n \cdot t^n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_o \cdot t^o \cdot x^o$$

$$= a_n \cdot t \cdot x^n + a_{n-1} \cdot t \cdot x^{n-1} + \ldots + a_o \cdot t \cdot x^o.$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle reellen x erfüllt, wenn die Koeffizienten paarweise übereinstimmen, d.h. wenn

$$(5)\quad \begin{cases} a_n \cdot t^n = a_n \cdot t \\ a_{n-1} \cdot t^{n-1} = a_{n-1} \cdot t \\ \vdots \\ a_1 \cdot t^1 = a_1 \cdot t \\ a_0 \cdot t^0 = a_0 \cdot t \quad \text{gilt.} \end{cases}$$

Da unter den gegebenen Voraussetzungen aus $a_0 t^0 = a_0 t$ stets $a_0 = 0$ folgt und weiter von den Gleichungen $t = t^k$ $(k = 1, \ldots, n)$ nur die für $k = 1$ erfüllt ist, sind die Gleichungen (5) nur erfüllt, wenn alle a_k außer a_1 gleich 0 sind; a_1 kann eine beliebige reelle Zahl sein.

Daher sind unter den Voraussetzungen des Falles (4) alle linearen Funktionen der Form $y = a_1 x$ und nur diese ganz-rationalen Funktionen Lösungen der Aufgabe.

11/12/III/5) Lösung: 7 Punkte

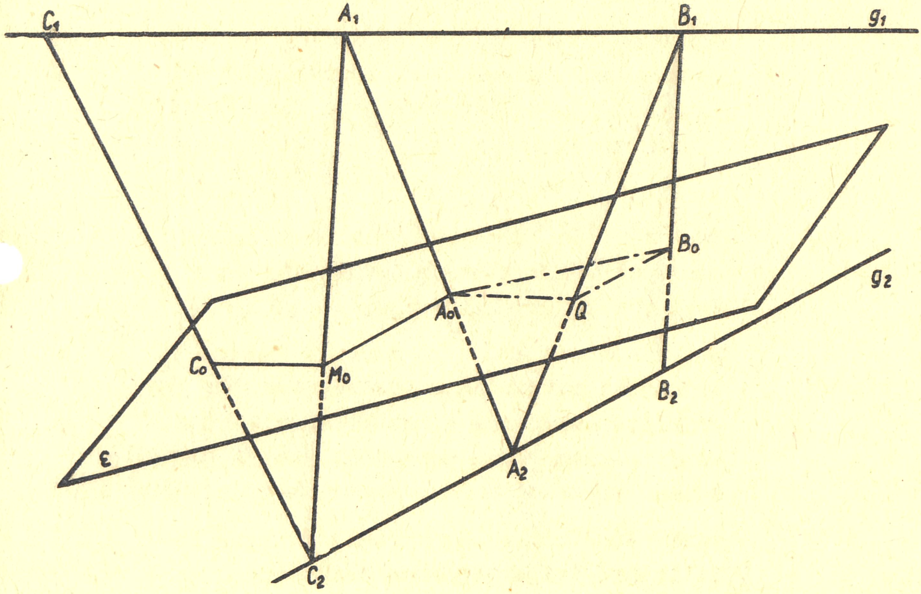

Abb.L 11/12;5

(I) Auf g_1 bzw. g_2 seien je zwei Punkte $A_1 \neq B_1$ bzw. $A_2 \neq B_2$ beliebig gewählt. Die Punkte, die die Strecken A_1A_2, B_1B_2 bzw. B_1A_2 im erwähnten Verhältnis von innen teilen, seien A_o, B_o bzw. Q genannt, woraus $Q \neq A_o$ und $Q \neq B_o$ folgt.
Nach der Umkehrung eines der Strahlensätze folgt aus der Gleichheit der Teilverhältnisse

$$A_oQ \parallel g_1 \quad \text{und} \quad QB_o \parallel g_2 \qquad (1)$$

Aus $g_1 \not\parallel g_2$ folgt jetzt $A_oQ \not\parallel QB_o$ und damit $A_o \neq B_o$.

Daher liegt Q nicht auf der Geraden durch A_o und B_o; denn anderenfalls wäre $g_1 \parallel g_2$ im Widerspruch zur Aufgabenstel-

lung.
Also bestimmen A_0, B_0 und Q eine Ebene ε, die zu g_1 und g_2 parallel liegt.

(II) Seien C_1 auf g_1 und C_2 auf g_2 beliebig liegende Punkte. Der innere Teilpunkt von C_1C_2 mit dem erwähnten Teilverhältnis sei C_0, der von A_1C_2 sei M_0. Analog zu (I) folgt $M_0A_0 \parallel g_2$ und $C_0M_0 \parallel g_1$.
Daher und aus (I) folgt

$$M_0A_0 \parallel B_0Q \quad \text{sowie} \quad C_0M_0 \parallel QA_0.$$

Also gehört mit A_0 auch M_0 und mit M_0 auch C_0 zu ε.
Daraus folgt: Alle Punkte, die die Verbindungsstrecke eines Punktes auf g_1 mit einem Punkt auf g_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilen, gehören zu ε.

(III) C_0 sei beliebiger Punkt auf ε.
Die Parallele h_1 durch C_0 zu g_1 und die Parallele h_2 durch A_0 zu g_2 sind in ε gelegen und einander nicht parallel. Sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der M_0 genannt sei. Die durch A_1, A_2 und g_2 bestimmte Ebene enthält A_2 und damit A_0, also h_2 und folglich M_0. Damit schneiden sich die Geraden durch A_1 und M_0 und die Gerade g_2 in genau einem Punkt, der C_2 genannt sei. Ebenso (mit C_2, A_1, M_0, C_0, g_1, h_1 statt A_1, A_2, A_0, M_0, g_2, h_2) folgt daß sich die Gerade durch C_2 und C_0 und die Gerade g_1 in genau einem Punkt schneiden, der C_1 genannt sei. Dann folgt der Reihe nach, daß auch A_1C_2 durch M_0 und C_1C_2 durch C_0 von innen im erwähnten Verhältnis geteilt werden.
Damit gehört jeder Punkt von ε zum geometri-

schen Ort.
Also ist der gesuchte geometrische Ort
die zu g_1 und g_2 parallele Ebene ε.

11/12/III/6) <u>Lösung:</u>

a) Die Menge $\mathfrak{M}_1$ besteht aus allen Punkten der schraffiert gezeichneten Dreiecksfläche, einschließlich der Randpunkte. 2 Punkte
Die Mengen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ bestehen jeweils aus allen im Innern der gezeichneten Rechtecke gelegenen Punkten (also ohne die jeweiligen Randpunkte).

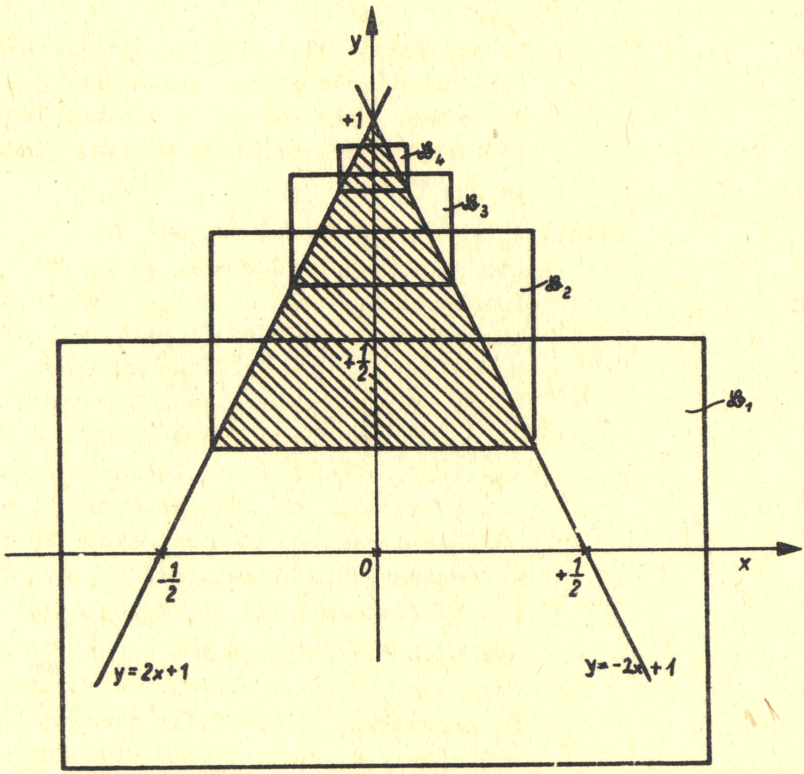

Abb. L 11/12;6

b) Wegen (1), (2), (3) gilt 2 Punkte

$P_1\ (0;1) \in \mathfrak{M}_1$

Die Abstände der oberen Seiten der die $\mathfrak{L}_n$ enthaltenden Rechtecke von der x-Achse sind:

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

Für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt $a_n < 1$, also $P_1 \notin \mathfrak{L}_n$ $(n = 1,2,3 \ldots)$

Der Punkt (0;1) gehört zu $\mathfrak{M}_1$, da er die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt, wie man aus $1 \geqq 0$, $1 - 2\cdot 0 \leqq 1$, $1 + 2\cdot 0 \leqq 1$, ersieht.
Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1,2, \ldots$ in $\mathfrak{L}_n$ enthalten, da für jedes $n = 1,2,\ldots$ die Beziehung $1 > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c) 1. Wir zeigen: Ist eine positive ganze Zahl $n_o \leqq 9$, so hat sie nicht die Eigenschaft, daß jedes Element von $\mathfrak{M}_2$ auch Element von $\mathfrak{L}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{L}_{n_o}$ ist. 4 Punkte

<u>Beweis:</u>
Zu $\mathfrak{M}_2$ gehört auch der Punkt $(0; \frac{999}{1000})$, da er die Ungleichungen (1), (2), (3), (6) erfüllt, wie man aus $1 - \frac{1}{1000} \geqq 0$, $1 - \frac{1}{1000} - 2\cdot 0 \leqq 1$,

$1 - \frac{1}{1000} + 2\cdot 0 \leqq 1$; $1 - \frac{1}{1000} \leqq 1 - \frac{1}{1000}$

ersieht.
Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1, \ldots, n_o$ in $\mathfrak{L}_n$ enthalten,

da für jedes $n = 1, \dots, n_0$, die Beziehung $1 - \frac{1}{1000} > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

2. Wir zeigen: Ist eine ganze Zahl $n_1 \geqq 10$, so hat sie die Eigenschaft, daß jedes Element von $\mathfrak{M}_2$ auch Element von $\mathfrak{L}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{L}_{n_1}$ ist.

<u>Beweis:</u>

Sei (x,y) irgend ein Punkt aus $\mathfrak{M}_2$. Dann erfüllt er die Ungleichungen (1), (2), (3), (6). Aus (1), (6) folgt

$$\frac{1}{1000} \leqq 1 - y \leqq 1 \text{ , also erst recht}$$

$$\frac{1}{2^{n_1}} < 1 - y \leqq 1.$$

Wegen $1 > \frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > \dots > \frac{1}{2^{n_1}}$ gibt es somit unter den Zahlen $n = 1, \dots, n_1$ eine, für die $\frac{1}{2^n} < 1 - y \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ gilt.

Für diese gilt dann erst recht

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y < \frac{3}{2^n} \text{ , also}$$

$$1 - \frac{3}{2^n} < y < 1 - \frac{1}{2^n} \text{ , ferner wegen (2),(3)}$$

auch $y - 1 \leqq 2x \leqq 1 - y$, also

$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \text{ , und somit insgesamt}$$

$(x,y) \in \mathfrak{L}_n$, womit die Behauptung $(x,y) \in \mathfrak{L}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{L}_{n_1}$ gezeigt ist.

3. Aus 2. folgt die zu beweisende <u>Existenz</u> einer Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft; aus 1. und 2. folgt, daß die gesuchte <u>kleinste</u> Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft die Zahl $n_1 = 10$ ist.

insgesamt 8 Punkte