A 11/12 X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12/II/1) Es sind alle geordneten Paare (x,y) reeller Zahlen anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

$$x^6 + y^6 = \frac{7}{16} \qquad (2)$$

erfüllt ist.

11/12/II/2) Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{k}$ wird für jede beliebige reelle Zahl a und jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ durch

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdot(a-2)\cdot\ldots\cdot[a-(k-2)]\cdot[a-(k-1)]}{k!}$$

definiert.

a) Untersuchen Sie, ob auch in jedem hier genannten Fall für a und k die für ganzzahlige $a \geqq k$ aus dem Pascalschen Dreieck bekannte Beziehung

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1} \quad \text{gilt!}$$

b) Zeigen Sie, daß für $k > 2$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2}\cdot k!\,(k-2)!}\cdot(-1)^{k+1} \quad \text{gilt!}$$

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

11/12/II/3) Die ersten Zeilen eines (beliebig fortsetzbaren) dreieckigen Zahlenschemas lauten:

Zeile 0	1
Zeile 1	1 1 1
Zeile 2	1 2 3 2 1
Zeile 3	1 3 6 7 6 3 1
....	. . . .

Die allgemeine Vorschrift zur Bildung dieses Zahlenschemas lautet:
Die einzige Zahl in Zeile 0 sei die Zahl 1.
Jede weitere Zahl sei gleich der Summe aus der unmittelbar über ihr stehenden Zahl und deren beiden Nachbarzahlen, wobei links und rechts von den Rändern fehlende Zahlen durch Nullen ersetzt zu denken sind.

Es ist für jede natürliche Zahl n zu beweisen, daß in diesem Schema die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n den Wert 3^n hat.

11/12/II/4) Es sei ABCD ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien

$\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$,

$\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$ und δ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSA$.
Beweisen Sie, daß dann

$$ac - bd = ef \cdot \cos\delta \, .$$

gilt!

L 11/12 X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11/12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe

11/12/II/1) Lösung: 9 Punkte

Angenommen, es sei (x,y) eine Lösung des Gleichungssystems (1), (2). Dann gilt

$y^2 = 1 - x^2$ sowie

$$x^6 + 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 = \frac{7}{16}, \text{ also}$$

$$3x^4 - 3x^2 + \frac{9}{16} = 0 \quad \text{oder}$$

$$x^4 - x^2 + \frac{3}{16} = 0. \quad (5)$$

Daher sind $(x_1{}^2, y_1{}^2)$, $(x_2{}^2, y_2{}^2)$ mit

$$x_1{}^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

und

$y_1{}^2 = \frac{1}{4}$ sowie $x_2{}^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ und

$y_2{}^2 = \frac{3}{4}$ die einzigen Paare, deren Komponenten durch Quadrieren aus den Komponenten einer Lösung (x,y) von (1),(2) in der entsprechenden Weise entstehen können.

Also können nur die geordneten Paare

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad (6)$$

Lösungen des Gleichungssystems (1), (2) sein.

Tatsächlich sind für diese acht geordneten Paare die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

Das gegebene Gleichungssystem hat also <u>genau acht reelle Lösungen</u>, wie sie in (6) angegeben sind.

11/12/II/2) <u>Lösung:</u> 5 Punkte

a) Nach Definition gilt für jede reelle Zahl a und jede natürliche Zahl k die Beziehung

$$\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot[a-(k-1)]}{k!} + \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot[a-(k-1)]\cdot(k+1)}{k!(k+1)} + \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot[a-(k-1)]\cdot(k+1+a-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{(a+1)\,a\,(a-1)\cdot\ldots\cdot[a-(k-1)]}{(k+1)!}$$

$$= \binom{a+1}{k+1}$$

b) Nach Definition gilt (mit $k > 2$) 5 Punkte

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\ldots\cdot(\frac{3-2k}{2})}{k!}$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2^k\cdot k!}$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2k-4)\cdot(2k-3)}{2^k\cdot k!\cdot2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2k-4)}$$

Die Anzahl der im Nenner außer 2^k und $k!$ auftretenden geraden Faktoren $2,4,6..,\ 2(k-2)$ ist $k-2$.

Also gilt weiter

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k-3)!}{2^k \cdot k! \; 2^{k-2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2)}$$

$$= (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} \cdot k! \cdot (k-2)!} ,$$

w.z.b.w. .

insgesamt 10 Punkte

11/12/II/3) Lösung: 11 Punkte

(I) Offenbar gilt : $s_o = 3^0$

$$\left[\begin{array}{l} s_1 = 3^1 \\ s_2 = 3^2 \\ s_3 = 3^3 \end{array} \right], \quad \text{d.h.}$$

die Behauptung ist richtig für $n = 0$.

Ferner steht nach Definition in Zeile 0 genau eine Zahl.

(II) Wir zeigen nun, daß aus der Richtigkeit der Behauptung sowie der weiteren Aussage, daß in Zeile n genau $2n + 1$ von Null verschiedene Zahlen stehen, die sämtlich positiv sind, für die ganze Zahl $n = k \geq 0$ auch die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt:

Bezeichnet man die von Null verschiedenen Zahlen der Zeile k der Reihe nach mit

$a_o, a_1, \ldots, a_{2k}$, so gilt laut Induktionsvoraussetzung

$s_k = a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k} = 3^k$,

$a_i > 0$ für $i = 0, 1, \ldots, 2k$.

Nach dem angegebenen Bildungsgesetz des Zahlenschemas sind dann in Zeile $k + 1$ genau die folgenden Zahlen von Null verschieden:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 0 + 0 + a_0\\
b_1 &= 0 + a_0 + a_1\\
b_2 &= a_0 + a_1 + a_2\\
b_3 &= a_1 + a_2 + a_3\\
&- - - - - - - -\\
b_{2k} &= a_{2k-2} + a_{2k-1} + a_{2k}\\
b_{2k+1} &= a_{2k-1} + a_{2k} + 0\\
b_{2k+2} &= a_{2k} + 0 + 0
\end{aligned}
$$

Jede von ihnen ist somit positiv, und ihre Anzahl beträgt $2k + 3 = 2(k + 1) + 1$.

In ihrer Summe

$s_{k+1} = b_0 + b_1 + \ldots + b_{2k+2}$

tritt jeder der Summanden a_i $(i = 0,1,2,\ldots, 2k)$ genau 3 mal auf. Daher gilt

$$
\begin{aligned}
s_{k+1} &= 3(a_0 + a_1 + \ldots + a_{2k}) = 3 \cdot s_k\\
&= 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}.
\end{aligned}
$$

(III) Daher sind die Aussage über die Anzahl der von Null verschiedenen a_i $(a_i > 0)$ und die zu beweisende Behauptung, die Summe s_n aller Zahlen der Zeile n des gegebenen Zahlenschemas betrage 3^n, für alle ganzen Zahlen $n \geqq 0$ bewiesen.

11/12/II/4) <u>Lösung:</u> 10 Punkte

Da ABCD ein Tangentenviereck ist, gilt

$a + c = b + d$. Folglich gilt auch

$$a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2bd + d^2,$$

$$ac - bd = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \quad (1)$$

Es sei $\overline{AS} = m$, $\overline{BS} = n$, $\overline{CS} = p$, $\overline{DS} = q$.
Da das Tangentenviereck konvex ist,
gilt $m + p = e, \quad n + q = f$ (2)

Mit Hilfe des Kosinussatzes erhält man:

$$a^2 = m^2 + n^2 - 2\,mn\cos\delta \qquad (3)$$

$$c^2 = p^2 + q^2 - 2\,pq\cos\delta \qquad (4)$$

$$b^2 = n^2 + p^2 + 2\,np\cos\delta \qquad (5)$$

$$d^2 = m^2 + q^2 + 2\,mq\cos\delta \qquad (6)$$

Aus (1), (3), (4), (5) und (6) folgt:

$$ac - bd = \frac{1}{2}\cdot 2(np + mq + mn + pq)\cdot\cos\delta\,,$$

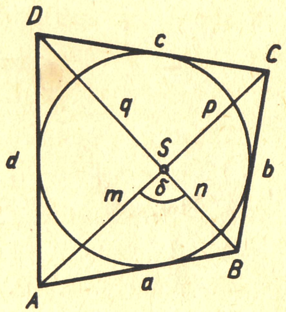

Abb.L 11/12;4

$ac - bd = (n + q)(m + p)\cdot\cos\delta$, woraus
man wegen (2)

$ac - bd = e\cdot f\cdot\cos\delta$ erhält, w.z.b.w. .