Umlauft

L 10;I X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

10/IV/1) Lösung: 7 Punkte

(1) Da genau neun Ziffern verwendet werden müssen, kann höchstens eine der Primzahlen einstellig sein. Andererseits muß, da neun ungerade ist, mindestens eine der Primzahlen einstellig sein. Dafür kommen genau die Zahlen 2, 3, 5 und 7 in Frage.

(2) Die vier anderen Zahlen sind wegen (1) sämtlich zweistellig und können nur auf die Ziffern 1, 3, 7 und 9 enden, da sie sonst durch 2 oder 5 teilbar wären.

(3) Die einstellige Primzahl kann weder 3 noch 7 sein, da sonst für die restlichen vier zweistelligen Zahlen nur genau drei verschiedene Endziffern vorhanden wären, also (2) nicht erfüllt werden kann.

Es werden nun genau die folgenden beiden Fälle unterschieden:

(4a) Die einstellige Primzahl sei 2. Für die Zehnerstellen der vier zweistelligen Primzahlen bleiben dann genau die Ziffern 4, 5, 6 und 8.
Sämtliche zweistelligen Primzahlen, die sich unter diesen Bedingungen bilden lassen, sind:
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 83 und 89.
Von ihnen kann die Zahl 43 nicht zu einer der gesuchten Mengen gehören, da

diejenigen der genannten Primzahlen, in denen weder die Ziffer 4 noch die Ziffer 3 vorkommt, genau die Primzahlen 59, 61, 67 und 89 sind. Je drei von diesen enthalten aber eine der Ziffern 6, 9 zweifach, so daß man aus ihnen keine drei weiteren, den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Primzahlen auswählen kann. Wählt man aus den verbleibenden acht Primzahlen als Zahl, in der die Ziffer 5 vorkommt, die Zahl 53, dann entfallen 59 und 83, und aus den verbleibenden fünf Zahlen lassen sich, da dann 89 stets verwendet werden muß, zusammen mit den bereits gewählten Zahlen genau die folgenden beiden Mengen bilden:

(I) $\{2, 53, 41, 67, 89\}$ und

(II) $\{2, 53, 47, 61, 89\}$.

Analog findet man bei der Wahl von 59 (und damit 83) die beiden Mengen

(III) $\{2, 59, 41, 67, 83\}$ und

(IV) $\{2, 59, 47, 61, 83\}$.

Damit sind alle Möglichkeiten für Mengen der genannten Art, die die Zahl 2 enthalten, erschöpft.

(4b) Die einstellige Primzahl sei 5.
Dann bleiben für die Zehnerstellen der vier zweistelligen Primzahlen genau die Ziffern 2, 4, 6 und 8.

Sämtlicne zweistelligen Primzahlen, die sich unter diesen Bedingungen bilden lassen, sind 23, 29, 41, 43, 47, 61, 67, 83 und 89.

Wie in (4a) zeigt man, daß 43 zu keiner der Mengen gehören kann.
Ähnliche Überlegungen wie in (4a) ergeben genau

vier weitere Mengen, die den Bedingungen entsprechen, nämlich:

(V) $\{5, 23, 41, 67, 89\}$
(VI) $\{5, 23, 47, 61, 89\}$
(VII) $\{5, 29, 41, 67, 83\}$
(VIII) $\{5, 29, 47, 61, 83\}$.

Es gibt mithin genau die Mengen I bis VIII der gesuchten Art.

10/IV/2) Lösung: 4 Punkte

a) Die Mittelpunkte der Rechtecke A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D' seien in dieser Reihenfolge mit M_1 bis M_5 bezeichnet.

Die durch B', A, D' verlaufende Schnittebene und die durch A', B, C' verlaufende Schnittebene gehen beide durch M_1 und M_2. Daher hat ihre Schnittgerade mit dem Körper des Quaders (wegen dessen Konvexität) genau die Strecke M_1M_2 gemeinsam.

Auf analoge Weise erhält man entsprechende Aussagen für die Strecken M_1M_3, M_1M_4, M_1M_5. Daher sind A, B, C, D, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 Eckpunkte des Restkörpers (siehe Abb. L. 10;2), und zwar sind das auch sämtliche.[1)]

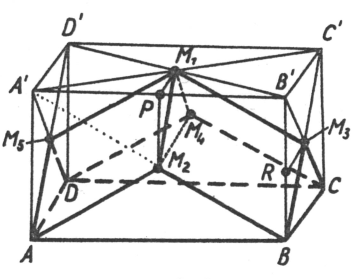


Abb. L 10;2

1) Ein Nachweis, daß die genannten Punkte auch wirklich sämtliche Eckpunkte des Restkörpers sind, wird hier nicht geführt und auch vom Schüler nicht erwartet.

b) Die Mittelpunkte der Strecken A'B' und BB' seien P und R. Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle PM_1M_2$ und $\triangle RM_3B$ kongruent; denn sie stimmen in den Längen zweier Seiten und der Größe des von diesen eingeschlossenen Winkels überein. 3 Punkte

Daher gilt:

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_3B} .$$

Wegen $\overline{A'B} = 2\,\overline{A'M_2}$; $\overline{A'C'} = 2\,\overline{A'M_1}$ und $\overline{BC'} = 2\,\overline{M_1M_2}$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{A'B} : \overline{A'M_2} &= \overline{A'C'} : \overline{A'M_1}\\ &= \overline{BC'} : \overline{M_1M_2}\\ &= 2 : 1\end{aligned}$$

und daher nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $M_1M_2 \parallel BC'$ und folglich auch $M_1M_2 \parallel M_3B$. Da entsprechende Aussagen auch für die Strecken M_1M_3, M_1M_4, M_1M_5 gelten, kann der Restkörper aus den drei Prismen mit den Eckpunkten

B, C, M_3, M_2, M_4, M_1 ;

A, D, M_5, M_2, M_4, M_1 ;

A, B, M_2, D, C, M_4 zusammengesetzt

werden.

Im ersten Prisma hat die Fläche des Dreiecks $\triangle BCM_3$ den Inhalt $\frac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot \overline{RB} = \frac{1}{4}\,bc$; die zugehörige Höhe PB' hat die Länge $\frac{1}{2}\,a$; also hat das Prisma das Volumen $\frac{1}{8}\,abc$. Das zweite Prisma hat eine gleichgroße Grundfläche, nämlich die des Dreiecks $\triangle ADM_5$, und die Höhe PA', für die $\overline{PB'} = \overline{PA'}$ gilt.

Mithin beträgt sein Volumen ebenfalls $\frac{1}{8}\,abc$.

Beim dritten Prisma hat die Fläche des Dreiecks $\triangle ABM_2$ den Inhalt $\frac{1}{4}\,ac$, die zugehörige

Höhe DA hat die Länge b. Daher hat das dritte Prisma das Volumen $\frac{1}{4}$ abc.

Somit ergibt sich:

$$V_R = 2 \cdot \frac{1}{8}\,abc + \frac{1}{4}\,abc = \frac{1}{2}\,abc$$

und daher

$$V_R : V_Q = 1 : 2.$$

insgesamt 7 Punkte

10/IV/3.1. <u>Lösung:</u> 7 Punkte

Es gilt $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$ für alle $x > 0$; $x \neq 1$; $y > 0$; $y \neq 1$.

(1) Für $c > 1$ ist $\log_c 4 < \log_c 12$, d. h.
$\frac{1}{\log_4 c} < \frac{1}{\log_{12} c}$, woraus sich nach Multiplikation mit der positiven Zahl $\log_{12} c \cdot \log_4 c$
$\log_{12} c < \log_4 c$ ergibt.
Also ist (✱) <u>erfüllt</u>.

(2) Für $c = 1$ ist (✱) <u>erfüllt</u>.

(3) Für $\frac{1}{4} \leqq c < 1$ gilt
$[\log_{12} c] = [\log_4 c] = -1$, also ist (✱) <u>erfüllt</u>.

(4) Für $\frac{1}{12} \leqq c < \frac{1}{4}$ gilt $[\log_{12} c] = -1$,
$[\log_4 c] = -2$, also ist (✱) <u>nicht erfüllt</u>.

(5) Für $\frac{1}{16} \leqq c < \frac{1}{12}$ gilt
$[\log_{12} c] = [\log_4 c] = -2$, also ist (✱) <u>erfüllt</u>.

(6) Angenommen, (✱) wäre für einen Wert c mit $0 < c < \frac{1}{16}$ erfüllt. Setzt man dann

$$[\log_{12} c] = u \quad \text{und}$$

$$[\log_4 c] = v, \text{ so gilt}$$

$$12^u \leqq c < 12^{u+1},$$

$$4^v \leqq c < 4^{v+1},$$

und weiter $4^v \leqq c < \frac{1}{16}$, also

$v < -2$, d. h., $v \leqq -3$,

und schließlich

$$12^{u+1} > c \geqq 4^v = 12^v \cdot (\tfrac{1}{3})^v$$

$$\geqq 12^v \cdot 27 > 12^{v+1},$$

was wegen $u < v$ nicht sein kann, so daß (✱) in diesen Fällen nicht erfüllt ist.

Daher ist (✱) genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{16} \leqq c < \frac{1}{12} \quad \text{oder}$$

$$c \geqq \frac{1}{4} \text{ ist.}$$

10/IV/3.2. Lösung: 7 Punkte

Ist $b > r > 0$, so gibt es ein Flächenstück, wie es die Abbildung zeigt. Ist sein Inhalt F und sein Umfang u, so gilt:

(1) $F = 2br - \frac{1}{2}\pi r^2$

und die wegen $r \neq 0$ mit (1) äquivalente Beziehung

(1') $2b = \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r$

sowie

(2) $u = 2r + 2b + \pi r.$

Aus (1') und (2) folgt der Reihe nach, daß dann die folgenden Gleichungen bestehen:

$$u = 2r + \frac{F}{r} + \frac{1}{2}\pi r + \pi r,$$
$$ur = 2r^2 + F + \frac{3}{2}\pi r^2$$

$$r^2(\frac{3}{2}\pi + 2) - ur = - F$$
$$r^2 - \frac{2u}{3\pi + 4} r = - \frac{2F}{3\pi + 4}$$
$$(3) \quad (r - \frac{u}{3\pi+4})^2 = \frac{u^2}{(3\pi+4)^2} - \frac{2F}{3\pi + 4} .$$

Aus (3) folgt wegen $(r - \frac{u}{3\pi + 4})^2 \geqq 0$, daß zwischen Umfang und Flächeninhalt eines solchen Flächenstücks stets die Abschätzung

$$\frac{u^2}{(3\pi + 4)^2} \geqq \frac{2F}{3\pi + 4}$$

besteht, d. h. also, daß

(4) $u \geqq \sqrt{2F(3\pi + 4)}$ ausfällt.

Soll in (4) das Gleichheitszeichen gelten, so muß wegen (3) $r = \frac{u}{3\pi + 4}$ sein,

woraus sich unter Beachtung von (4) mit dem Gleichheitszeichen

(5) $r = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}$ und hieraus in Verbindung mit (1')

(6) $b = \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}\,(\pi + 1) = r(\pi + 1) \quad (> r)$

ergibt.

Wählt man zu gegebenem $F > 0$ die Zahlen r und b gemäß (5) und (6), so gibt es wegen $b > r$ zu dem Paar (r,b) ein Flächenstück, wie es in der Aufgabe beschrieben ist. Zwischen dessen Inhalt F und dessen Umfang u besteht die Relation

$$u = \sqrt{2F(3\pi + 4)} .$$

L. 10;I

Daher genügt das Paar

$$(r,b) = \left(\sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}}, \sqrt{\frac{2F}{3\pi + 4}} (\pi + 1) \right)$$

den Bedingungen der Aufgaben und ist das einzige dieser Art.

Umlauf

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

10/IV/4) Lösung: 5 Punkte

Angenommen, es gibt eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit der geforderten Eigenschaft.

Dann gilt für jedes reelle x:

$$a(x + 1)^2 + b(x+1) + c = a(-x)^2 + b(-x) + c,$$

also

$$ax^2 + 2ax + a + bx + b + c = ax^2 - bx + c,$$

woraus man $(a + b)(2x + 1) = 0$ erhält.

Da diese Gleichung insbesondere für $x = 0$ erfüllt sein muß, folgt $a = -b$.

Mithin können höchstens die quadratischen Funktionen der Form

$f(x) = ax^2 - ax + c$ ($a \neq 0$; a,c beliebig reell) die geforderte Eigenschaft haben.

Tatsächlich gilt für jede von diesen:

$$f(x + 1) = a(x+1)^2 - a(x+1) + c = ax^2 + ax + c$$
$$f(-x) = a(-x)^2 - a(-x) + c = ax^2 + ax + c,$$

also

$$f(x + 1) = f(-x).$$

10/IV/5) Lösung: 6 Punkte

a) Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung, d. h. es sei

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Wegen $r < -6$ gilt $0 < -\frac{3}{r} < \frac{1}{2}$.

Daher gilt

$\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} > 0$, also $x > 0$ und damit

$2 > x\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{r}\right)$ bzw.

$4 > x\left(\frac{6 + r}{r}\right)$ bzw. wegen

$\left(\frac{6 + r}{r}\right) > 0$.

$0 < x < \frac{4r}{6 + r}$.

Also können höchstens solche x, für die

$0 < x < \frac{4r}{6 + r}$ gilt,

Lösung der gegebenen Ungleichung sein.

Tatsächlich gilt für alle diese Werte

$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4r}{6 + r}} = \frac{3}{r} + \frac{1}{2}$, also $\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$.

b) In diesem Falle geht die gegebene Ungleichung in

$\frac{2}{x} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ über.

Diese Ungleichung ist für alle $x > 0$ und nur für diese erfüllt, da genau für sie

$\frac{2}{x} > 0$ gilt.

c) In diesem Falle gilt $-\frac{3}{r} > \frac{1}{2}$ (2).

Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$. Wegen (2) ist diese Ungleichung für alle $x > 0$ erfüllt.

Es sei nun $x < 0$. Dann gilt $rx > 0$, und man erhält durch Multiplikation von (1) mit rx:

$2r - 3x > \frac{rx}{2}$ und weiter

$4r - 6x > rx$, woraus man wegen

$$(r + 6) > 0$$

$$x < \frac{4\,r}{6 + r}$$ erhält.

Also können im Falle c) höchstens solche x, für die $x > 0$ oder $x < \frac{4\,r}{6 + r}$ gilt, die gegebene Ungleichung erfüllen.

Tatsächlich ist für $x > 0$ wegen (2)

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}$$

und für

$$x < \frac{4\,r}{6 + r}$$

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4\,r}{6 + r}} = \frac{3}{r} + \frac{1}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}.$$

d) In diesem Falle gilt $-\frac{3}{r} < 0$.

Angenommen, die reelle Zahl $x \neq 0$ erfülle die gegebene Ungleichung. Dann gilt

$$\frac{2}{x} > \frac{1}{2} + \frac{3}{r} > 0 \quad \text{und daher } x > 0.$$

Daraus folgt

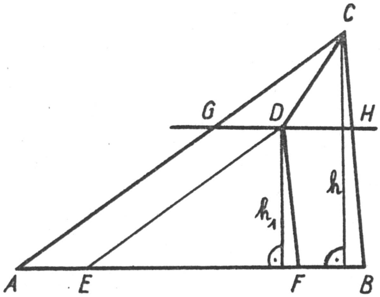
$$0 < x < \frac{4\,r}{6 + r}.$$ Also können höchstens solche x, für die $0 < x < \frac{4\,r}{6 + r}$ gilt, Lösungen der gegebenen Ungleichung sein.

Tatsächlich ist in diesem Falle

$$\frac{2}{x} > \frac{2}{\frac{4\,r}{6 + r}} = \frac{3}{r} + \frac{r}{2}, \text{ also } \frac{2}{x} - \frac{3}{r} > \frac{1}{2}.$$

10/IV/6) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

(I) Angenommen, die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ sei auf die angegebene Weise in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Flächeninhalte der Trapeze AEDC bzw. FBCD und der des Dreiecks $\triangle EFD$ seien der Reihe nach mit S_1, S_2, S_3 bezeichnet.



Dann gilt:

Abb. L 10;6

$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{6}\,\overline{AB} \cdot h$, wobei h die Länge der auf der Geraden durch A und B senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ bedeutet.

Wegen $EF \parallel AB$, $ED \parallel AC$, $FD \parallel BC$ sind in den Dreiecken $\triangle EFD$ und $\triangle ABC$ entsprechende Winkel gleich groß. Daher gilt:

$$\triangle EFD \sim \triangle ABC.$$

Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt in diesem Falle

$1 : 3 = h_1^2 : h^2$, wobei h_1 die Länge der auf der Geraden durch E und F senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle EFD$ bedeutet.

Daraus folgt (wegen $h_1 > 0$)

$$h_1 = \frac{h}{3}\sqrt{3}\,.$$

Die Parallele durch D zu AB schneide AC in G und BC in H. Dann verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle GDC$ und $\triangle DHC$ zueinander wie $\overline{GD} : \overline{DH}$.

Dasselbe Verhältnis haben auch die Flächeninhalte der Parallelogramme AEDG und FBHD zueinander. Daraus folgt:

$$S_1 : S_2 = \overline{GD} : \overline{DH}.$$

Wegen $S_1 = S_2$ ist Punkt D mithin Mittelpunkt von GH.

(II) Daraus ergibt sich, falls eine Lösung existiert, folgende Konstruktionsmöglichkeit:

(1) Man konstruiert $h_1 = \frac{h}{3}\sqrt{3}$.

Das kann z. B. dadurch geschehen, daß man ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe h konstruiert. Es sei 2 x die Seitenlänge dieses Dreiecks. Dann gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$h^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$, also

$$x = \frac{h}{3}\sqrt{3} = h_1.$$

(2) Man konstruiert die auf derselben Seite von AB wie C gelegene Parallele zu AB im Abstand h_1. Sie schneidet (wegen $h_1 < h$) die Strecken AC und BC in G bzw. H.

(3) Man konstruiert den Mittelpunkt D von GH und zieht die Parallelen durch D zu AC bzw. BC, die AB in E bzw. F schneiden.

(III) Beweis, daß die Punkte E, F, D, falls sie auf diese Weise konstruierbar sind, den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Nach Konstruktion gilt:

$S_3 : S = h_1^2 : h^2 = 1 : 3$, also

$S_3 = \frac{S}{3}$, also $S_1 + S_2 = \frac{2}{3} S$.

Die Fläche des Trapezes AEDC setzt sich zusammen aus der des Parallelogramms AEDG und der des Dreiecks $\triangle$ GDC.

Die Fläche des Trapezes FBCD setzt sich zusammen aus der des Parallelogramms FBHD und der des Dreiecks $\triangle$DHC.

Da D Mittelpunkt von GH ist, sind die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle GDC$ und $\triangle DHC$ gleich groß.

Aus demselben Grunde und wegen der beiden gemeinsamen Höhenlänge h_1 sind auch die Flächeninhalte der Parallelogramme AEDG und FBHD gleich groß. Daher gilt:

$$S_1 = S_2 \quad \text{und damit}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}.$$

(IV) Aufgrund der Ausführungen ergibt sich unmittelbar, daß die genannte Konstruktion stets auf genau eine Weise ausführbar ist.