A 10;I X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung! Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/III/1) a) Beweisen Sie den folgenden Satz:
Addiert man zu einer ganzen Zahl k das Quadrat der Hälfte ihres unmittelbaren Vorgängers, so entsteht das Quadrat einer rationalen Zahl.

b) Nutzen Sie eine bei diesem Beweis erhaltene Gleichung, um vier voneinander verschiedene pythagoreische Zahlentripel zu finden!
(Ein pythagoreisches Zahlentripel (x,y,z) ist ein geordnetes Tripel dreier von Null verschiedener natürlicher Zahlen x, y, z mit der Eigenschaft $x^2 + y^2 = z^2$. Zwei derartige Tripel heißen genau dann voneinander verschieden, wenn nicht eines von ihnen aus dem anderen dadurch erhalten werden kann, daß man x, y und z mit einer natürlichen Zahl $\neq 1$ multipliziert oder daß man x mit y vertauscht oder daß man beides durchführt.)

10/III/2) Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

10/III/3) Geben Sie für jede reelle Zahl a alle diejenigen linearen Funktionen f(x) an, die die Eigenschaft haben, daß für jedes reelle x

$$f(x) = f(x+1) - a \quad \text{gilt!}$$

30 04 49-1

A 10;II X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/III/4) Unter n! (gelesen n Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ und alle positiven reellen Zahlen $x \neq 1$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x}$$

gilt!

10/III/5) Während eines Schachturniers, bei dem jeder gegen jeden genau einmal spielte, wurden genau 15 Partien gespielt. Genau 5 Spiele endeten unentschieden (remis). Wie üblich gab es für jeden Sieg einen, für jedes Remis einen halben Punkt, für jede Niederlage 0 Punkte. Nach Abschluß des Turniers hatten keine zwei Spieler die gleiche Gesamtpunktzahl erzielt.
Der zweitbeste Spieler erreichte genau zwei Punkte mehr als der letzte.
Über einige Teilnehmer A, B, C, ... ist ferner folgendes bekannt:
A, der sich besser als D placierte, erreichte wie dieser kein Remis.
C, der Dritter wurde, schlug den Vierten.
Zeigen Sie, daß diese Angaben hinreichend sind, um den Ausgang des Spieles B gegen C zu ermitteln!

10/III/6) Im Innern eines Würfels mit der Kantenlänge 1 seien 28 verschiedene Punkte beliebig angeordnet. Es ist zu beweisen, daß es dann wenigstens ein aus zwei verschiedenen dieser 28 Punkte bestehendes Punktepaar gibt, so daß der Abstand dieser zwei Punkte voneinander nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist.

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

10/III/1) <u>Lösung:</u>

a) Für jede Zahl k gilt: 2 Punkte

$$(1)\quad k + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = \frac{4k + k^2 - 2k + 1}{4} =$$

$$= \frac{k^2 + 2k + 1}{4} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2.$$

Ist k ganz, so erhält man das Quadrat der rationalen Zahl $\frac{k+1}{2}$, womit der Satz bewiesen ist.

b) Die erhaltene Gleichung (1) führt auf ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn k eine Quadratzahl ist und $\frac{k-1}{2}$ sowie $\frac{k+1}{2}$ natürliche Zahlen sind. 4 Punkte

Letzteres ist für alle ungeraden Quadratzahlen $k > 1$ der Fall.
Man erhält so z.B. die folgenden pythagoreischen Zahlentripel (x,y,z):

k	$x = \sqrt{k}$	$y = \frac{k-1}{2}$	$z = \frac{k+1}{2}$	Tatsächlich ist
9	3	4	5	9 + 16 = 25
25	5	12	13	25 + 144 = 169
49	7	24	25	49 + 576 = 625
81	9	40	41	81 +1600 = 1681

Für jedes dieser vier Tripel gilt: In je dreien dieser vier Tripel kommt mindestens eine Zahl vor, die durch keine Zahl des vierten Tripels teilbar ist. Daher sind die vier Tripel (in dem angegebenen Sinne) voneinander verschieden.

insgesamt 6 Punkte

10/III/2) Lösung:

(I) Angenommen, die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ sei durch eine Parallele zur Basis AB in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt und es seien D, E die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Ferner sei F der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrecht stehenden Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ und G der Schnittpunkt dieser Höhe mit den genannten Parallelen. 3 Punkte

Dann gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz

$$\triangle ABC \sim \triangle DEC.$$

Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate einander entsprechender Seiten bzw. Höhen verhalten, gilt:

$\overline{CG}^2 : \overline{CF}^2 = 1 : 2$, woraus man

$\overline{CG} = \frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}$ erhält, d.h. CG ist so

lang wie eine (also jede) Kathete in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse CF.

(II) Daraus ergibt sich, daß eine Parallele zu AB nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann (s. Abb. L 10;2): 2 Punkte

(1) Man fällt das Lot CF von C auf AB.

(2) Man schlägt einen Halbkreis über CF.

(3) Man errichtet auf CF die Mittelsenkrechte. Ihr Schnittpunkt mit dem Halbkreis sei H genannt.

(4) Man schlägt den Kreis um C mit $\overline{CH}$. Schneidet er CF in einem Punkte, so

sei dieser G genannt.

(5) Man zieht die Parallele durch G zu AB

(III) Der Beweis, daß eine so konstruierte Parallele den Bedingungen der Aufgabe entspricht, verläuft folgendermaßen: 2 Punkte

Laut Konstruktion ist $\triangle CHF$ rechtwinklig-gleichschenklig, wobei CF seine Hypotenuse ist. Daher gilt:

$\overline{CF}^2 = 2\,\overline{CH}^2$, also

$$\overline{CH} = \frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}\,.$$

Ferner gilt nach Konstruktion $\overline{CH} = \overline{CG}$.

Sind nun D und E die Schnittpunkte der konstruierten Parallelen mit AC bzw. BC, so gilt $DE \parallel AB$ und daher einerseits $CG \perp DE$, andererseits

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

Die Flächeninhalte I und I_1 dieser Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate einander entsprechender Höhen CF, CG, d.h.:

$$I : I_1 = \overline{CF}^2 : \overline{CG}^2 = \overline{CF}^2 : \left(\frac{\overline{CF}}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$= 2 : 1$, q.e.d.

(IV) Im Konstruktionsschritt (2) gibt es zwei Möglichkeiten, einen Halbkreis zu wählen, und daher führen (2), (3) auf verschiedene Punkte H_1 bzw. H_2. Für diese ist jedoch $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$. 1 Punkt

Da alle übrigen Konstruktionsschritte eindeutig durchführbar sind (z.B. (4) wegen $\overline{CH} < \overline{CF}$), trifft dies somit auch für die gesamte Konstruktion zu.

insgesamt 8 Punkte

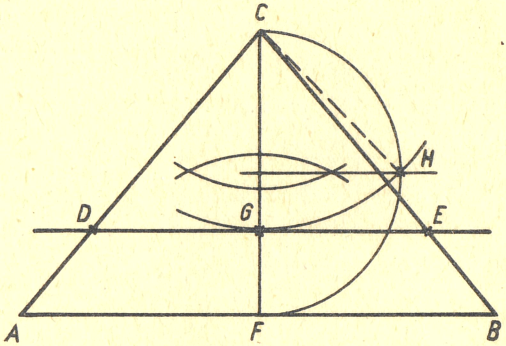

Abb. L 10;2

10/III/3) Lösung: 6 Punkte

Angenommen $f(x)$ sei eine lineare Funktion mit der geforderten Eigenschaft.
Dann läßt sich diese Funktion in der Form $f(x) = mx + n$ (m, n reelle Zahlen) schreiben, und es gilt für jedes reelle x die Gleichung

$mx + n = m(x+1) + n - a$, also $m = a$.

Daher können nur Funktionen mit einer Gleichung der Form $f(x) = ax + n$ (n eine reelle Zahl) die geforderte Eigenschaft haben.
Tatsächlich gilt für jede solche Funktion und für jedes reelle x:

$f(x) = ax + n = a(x+1) + n-a = f(x+1) - a$.

L 10;II X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

10/III/4) Lösung: 6 Punkte

Es gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$;

daher gilt:

$\log_x (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n) = \log_x n!$

Daraus folgt

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 4 + \ldots + \log_x n = \log_x n! \quad (1)$$

Nun gilt für alle reellen Zahlen a, b > 0 und a, b $\neq 1$:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \ldots + \frac{1}{\log_n x} = \frac{1}{\log_{n!} x},$$

w.z.b.w.

10/III/5) Lösung: 8 Punkte

Wir bezeichnen die Spieler nach ihrer Placierung mit I, II, III usw.

Aufgrund der gemachten Angaben gelten folgende Aussagen:

(1) Es wurden genau 15 Partien gespielt.

(2) Genau 5 Partien endeten Remis.

(3) Die Gesamtpunktzahlen waren paarweise voneinander verschieden.

(4) II erreichte genau zwei Punkte mehr als der Letzte.

(5) A schnitt besser ab als D.

(6) A spielte nicht remis

(7) D spielte nicht remis.

(8) C = III.

(9) C schlug IV.

Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer mit n, so gilt

$\frac{n\,(n-1)}{2} = 15$, woraus n = 6 folgt.

(10) An dem Turnier nahmen genau 6 Spieler teil.

Bezeichnet man die von VI erreichte Punktzahl mit z, so hat wegen (4) der Spieler II genau z + 2 Punkte erreicht. Daraus folgt wegen (3) als einzige Möglichkeit für III, IV, V:

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Spieler} & \text{erreichte Gesamtpunktzahl} \\ \text{V} & z + 0{,}5 \\ \text{IV} & z + 1 \\ \text{III} & z + 1{,}5 \end{array}\right.$$

Die Summe der von II, III, IV, V, VI erreichten Gesamtpunktzahlen ist somit

5z + 5.

Bezeichnet man nun die von I erreichte Punktzahl mit t, so gilt also

$5z + 5 + t = 15$, woraus $t = 5\,(2-z)$ folgt. Nun ist (2-z) ein ganzzahliges Vielfaches von 0,5 und daher t ein ganzzahliges Vielfaches von 5 · 0,5. Andererseits gilt nach (3), und da I höchstens 5 Partien gewonnen haben kann,

$2{,}5 \leqq t \leqq 5$.

Daher kann t nur 2,5 oder 5 sein. Für t = 2,5 ergäbe (3), weil I die höchste Punktzahl hat, im Widerspruch zu $t = 10 - 5z$ für z den Wert z = 0.

Daher folgt t = 5 und z = 1.

(12) I gewann also seine sämtlichen Spiele. Damit erhält man unter Berücksichtigung von (8), (9), (10), (11) und (12) folgende Punkttabelle:

	I	II	III	IV	V	VI	Ges.Punktzahl
I	X	1	1	1	1	1	5
II	0	X		.			3
C=III	0		X	1			2,5
IV	0	.	0	X	.	.	2
V	0			.	X		1,5
VI	0			.		X	1

Nun läßt sich die Placierung von D ermitteln.

Es gilt

D $\neq$ III wegen (8)

D $\neq$ V, da die Gesamtpunktzahl von D wegen (7) eine ganze Zahl sein muß

D $\neq$ I wegen (5)

D $\neq$ II und D $\neq$ VI aus folgendem Grund: Wäre D = II oder D = VI, so wäre nach (7) in Zeile und Spalte II bzw. in Zeile und Spalte VI überall 1 oder 0 einzusetzen. Danach verblieben noch genau 10 freie Felder, in die wegen (2) überall 0,5 einzusetzen wäre, und hierbei könnte die Gesamtpunktzahl 2,5 von C nicht auftreten

Also ist D = IV. (13)

Die Tabelle enthält noch 18 freie Felder. In genau 10 von ihnen ist wegen (2) die Zahl 0,5 einzusetzen. In genau 8 von ihnen ist demnach 1 oder 0 einzusetzen. Sechs dieser Felder sind wegen (7) schon bestimmt und in der Tabelle durch einen Punkt markiert. Die restlichen beiden Zahlen 1 und 0 müssen bei II und VI auftreten, da diese wegen ihrer ganzzahligen Gesamtpunktzahlen nicht sämtliche noch offene Partien remis gespielt haben können.

C hat also außer gegen I und IV sämtliche Partien remis gespielt.
Wegen (6) und (13) ist somit A = I und hiernach B einer der (von C und) von I und IV verschiedenen Spieler.
Daher folgt als einzige Möglichkeit für den gesuchten Spielausgang:

(14) Das Spiel B gegen C endete unentschieden.

10/III/6) <u>Lösung:</u> 6 Punkte

Die Lösung kann nach dem "Schubfachprinzip" erfolgen.
Man denke sich den Würfel durch ebene Schnitte in 27 untereinander kongruente Teilwürfel zerlegt. Die Raumdiagonale jedes dieser Teilwürfel hat die Länge $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Da wenigstens einer der Teilwürfel zwei verschiedene der 28 Punkte in seinem Innern oder auf seinem Rand enthält, kann der Abstand dieser beiden Punkte mithin nicht größer als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ sein, weil die Länge der Raumdiagonale eines Würfels gleich dem größten Abstand ist, den zwei Punkte ein und desselben Würfels voneinander haben können. (Bekanntlich läßt sich jedem Würfel eine Kugel umschreiben, deren Durchmesser gleich der Raumdiagonalen des Würfels ist.)