A 10

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10/II/1) Beweisen Sie, daß jede mehrstellige natürliche Zahl größer ist als das aus ihren sämtlichen Ziffern gebildete Produkt!

10/II/2) Vier Personen A, B, C und D machen in einem Spiel je drei Aussagen über denselben Gegenstand, einen einfarbigen Ball.

Die Aussagen lauten:

A (1) Der Ball ist weder rot noch gelb.
(2) Der Ball ist entweder rot oder grün,
(3) Der Ball ist schwarz.

B (1) Wenn der Ball nicht gelb ist, ist er weiß.
(2) A macht eine falsche Aussage, wenn er sagt, der Ball ist schwarz.
(3) Der Ball ist grün.

C (1) Der Ball ist entweder schwarz oder grün.
(2) De Ball ist rot.
(3) Der Ball ist entweder grün oder schwarz oder gelb.

D (1) Der Ball hat die gleiche Farbe wie mein Pullover.
(2) Wenn der Ball gelb ist, ist er nicht schwarz.
(3) Der Ball ist schwarz und grün.

Ermitteln Sie die Farbe das Balles für die folgenden beiden Fälle und untersuchen Sie, ob allein mit den vorliegenden Angaben die Farbe des Pullovers von D ermittelt werden kann! Wenn ja, geben Sie diese Farbe an!

30 04 48-1 230·1000/70 (E)

Fall a) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei wahr.

Fall b) Von den drei Aussagen jeder der vier Personen sind genau zwei falsch.

10/II/3) In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den

$$\overline{AB} : \overline{SM} = 3 : \sqrt{6} \quad \text{gilt.}$$

Beweisen Sie, daß das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d.h. daß alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

10/II/4) Es seien m und n beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, daß mindestens eine der Zahlen

$$x = 2\,mn; \quad y = m^2 - n^2; \quad z = m^2 + n^2$$

durch 5 teilbar ist!

L 10 X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe

10/II/1) Lösung: 9 Punkte

Jede n-stellige natürliche Zahl z mit den Ziffern $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ $(n > 1)$ im dekadischen System läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$z = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \dots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10^1 + a_0\cdot 10^0.$$

Dabei gilt

$0 < a_{n-1} \leqq 9$ und $0 \leqq a_i \leqq 9$ $(i=0,\dots n-2)$

Daraus folgt $z \geqq a_{n-1}\cdot 10^{n-1}$

Das aus den sämtlichen Ziffern von z gebildete Produkt P lautet:

$P = a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdots a_2\cdot a_1\cdot a_0.$

Wegen $0 \leqq a_i \leqq 9$ $(i=0,\dots,n-2)$ und $a_{n-1} > 0$ sowie $n > 1$ *) gilt:

$P \leqq a_{n-1} \cdot 9^{n-1} < a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \leqq z$, also

$P < z$, w.z.b.w.

*) Die Voraussetzung $n > 1$ verwendet man, um $9^{n-1} < 10^{n-1}$ zu erhalten, die Voraussetzung $a_{n-1} > 0$, um daraus $a_{n-1}\cdot 9^{n-1} < a_{n-1}\cdot 10^{n-1}$ zu schließen.

30 04 48-1 230·1000/70 (E)

10/II/2) Lösung: 5 Punkte

Fall a) Angenommen, C (3) wäre falsch. Dann wäre auch C (1) falsch, und es gäbe im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe höchstens eine wahre Aussage von C. Also kann C(3) nur wahr, der Ball also nur grün oder schwarz oder gelb sein.

Daher muß C (2) falsch, also laut Aufgabenstellung C (1) wahr sein. Der Ball kann mithin nur schwarz oder grün sein.

Dann ist B (1) falsch, demnach muß B (3) wahr sein.

Der Ball kann also nur grün sein.

Die Aussage D (3) ist falsch, da der Ball einfarbig ist. Also ist D (1) wahr. Der Pullover von D kann daher ebenfalls nur grün sein.

Fall b) Angenommen, C (1) wäre wahr. 5 Punkte

Dann wäre auch C (3) wahr, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann C (1) nur falsch sein. Angenommen, C (3) wäre wahr. Dann wäre der Ball gelb, also wären alle Aussagen von A falsch, im Widerspruch zu den Bedingungen der Aufgabe. Also kann auch C (3) nur falsch und folglich C (2) nur wahr sein. Der Ball kann somit nur rot sein.

Daher müssen B (1), (3) falsch sein.

Andererseits gilt:

D (2) ist unabhängig von allen Bedingungen stets wahr, also ist

laut Aufgabenstellung D (1) falsch.
Die Farbe des Pullovers von D läßt sich allein mit Hilfe der gemachten Aussagen nicht ermitteln.
Es steht nur fest, daß der Pullover nicht rot ist.

insgesamt 10 Punkte

10/II/3) Lösung: 10 Punkte

In jedem gleichseitigen Dreieck ist der Umkreismittelpunkt gleichzeitig der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, und jede von diesen ist mit einer Höhe des Dreiecks identisch. Im vorliegenden Fall hat jede von ihnen mithin die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Die Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks teilen einander so im Verhältnis 2 : 1, daß

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ist.

Ferner ist nach Aufgabenstellung

$\overline{SM} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

Daher gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, daß die Länge jeder der Strecken AS, BS, CS gleich

$\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}} = a$ ist.

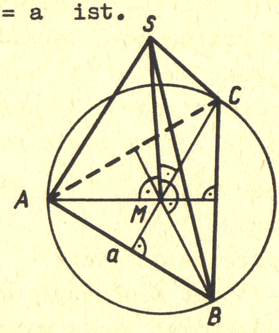

Abb. L 10;3

10/II/4) <u>Lösung:</u> 11 Punkte

Angenommen, eine der Zahlen m, n sei durch 5 teilbar. Dann ist x durch 5 teilbar. Angenommen, keine der Zahlen m, n sei durch 5 teilbar. Dann läßt jede der Zahlen m^2, n^2 bei Division durch 5 entweder den Rest 1 oder den Rest 4.

<u>Beweis:</u> Jede nicht durch 5 teilbare ganze Zahl g läßt sich in der Form $g = 5p + r$ mit ganzzahligen p, r und $1 \leqq r \leqq 4$ schreiben.

Dann gilt: $g^2 = (5p+r)^2 = 25p^2 + 10pr + r^2$, d.h. g^2 läßt bei Division durch 5 den gleichen Rest wie r^2.

Daraus ergibt sich:
Läßt bei Division durch 5
eine Zahl den Rest 1, so läßt ihr Quadrat den Rest 1
eine Zahl den Rest 2, so läßt ihr Quadrat den Rest 4
eine Zahl den Rest 3, so läßt ihr Quadrat den Rest 4
eine Zahl den Rest 4, so läßt ihr Quadrat den Rest 1.
Lassen m^2 und n^2 den gleichen Rest, dann ist y durch 5 teilbar.
Lassen m^2 und n^2 verschiedene Reste, dann ist wegen $4+1 = 1+4 = 5$ die Zahl z durch 5 teilbar.
Damit ist in jedem möglichen Fall gezeigt, daß von den Zahlen x, y, z stets mindestens eine durch 5 teilbar ist.