X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe

9/III/1) <u>Lösung:</u> 6 Punkte

Die erwähnte Anzahl von Tagen sei x.

Aus (2) folgt:

(5) Es gab keinen Tag, an dem Günter vor- und nachmittags Tischdienst hatte.

Aus (3) folgt:

(6) Günter hatte an genau $(x - 13)$ Tagen nachmittags Tischdienst.

Aus (4) folgt:

(7) Günter hatte an genau $(x - 11)$ Tagen vormittags Tischdienst.

Aus (1), (5), (6) und (7) erhält man

$x - 13 + x - 11 = 6$ und daraus

(8) $x = 15$ als Anzahl der Tage, die Günter im Lager verbrachte. Nach (6) bzw. (7) folgt also weiter als Anzahl der Vormittage bzw. der Nachmittage, an denen Günter Tischdienst hatte, 2 bzw. 4.

Nun gilt weiter:

Da täglich genau vier Schüler Tischdienst hatten, waren insgesamt genau 60 Einsätze notwendig. Da jedes Mitglied der Gruppe gleich oft eingesetzt wurde, und daher wie Günter genau 6 mal eingesetzt war, bestand die Gruppe aus genau 10 Schülern.

9/III/2) <u>Lösung:</u> 7 Punkte

Den gesuchten Flächeninhalt erhält man, indem man vom Flächeninhalt a^2 des Quadrats ABCD die Summe der Flächeninhalte der acht Dreiecke

$\triangle AKE$, $\triangle BLE$, $\triangle BMF$, $\triangle CNF$, $\triangle COG$, $\triangle DPG$, $\triangle DQH$, $\triangle ARH$ subtrahiert.

Nun gilt:

$\triangle ABF \cong \triangle ABH \cong \triangle BCG \cong \triangle BCE \cong \triangle CDH \cong \triangle CDF \cong \triangle DAE \cong \triangle DAG$; denn diese Dreiecke stimmen sämtlich in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen rechten Winkel überein.

Daher sind die anfangs genannten acht Dreiecke sämtlich untereinander kongruent; denn sie stimmen in den Winkeln und in einander entsprechenden Seiten überein.

Es gilt ferner $\triangle AKE \sim \triangle ABF$ (nach dem Hauptähnlichkeitssatz).

Folglich ist $\triangle AKE$ rechtwinklig bei K, entsprechend $\triangle BFM$ bei M. Deshalb gilt $KE \parallel BM$. Aus einem der Strahlensätze folgt:

$\overline{KE} : \overline{MB} = \overline{AE} : \overline{AB} = 1 : 2$, d.h. wegen

$\overline{AK} = \overline{MB}$ $\quad \overline{AK} = 2\overline{KE}$. Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle AKE$, folgt:

$\overline{KE}^2 + (2\overline{KE})^2 = \overline{AE}^2$, d.h.

$5\,\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{4}$ bzw. $\overline{KE}^2 = \frac{a^2}{20}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AKE$ beträgt

$$\frac{\overline{KE} \cdot 2\,\overline{KE}}{2} = \overline{KE}^2 = \frac{a^2}{20}.$$

Mithin ist der gesuchte Flächeninhalt

$$a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3}{5}a^2.$$

9/III/3) Lösung: 7 Punkte

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die die gegebene Gleichung erfüllt.

Dann ist $\frac{5x + 3}{7}$ ganzzahlig, und es gibt eine reelle Zahl a mit $0 \leq a < 1$, so daß

$\frac{10 + 3x}{6} = \frac{5x + 3}{7} + a$ gilt.

Daraus folgt

$70 + 21x = 30x + 18 + 42a$, woraus man

$x = \frac{52 - 42a}{9}$ erhält.

Wegen $0 \leqq a < 1$ folgt daraus

$$\frac{10}{9} < x \leqq \frac{52}{9}$$

und weiter

$$\frac{\frac{50}{9} + 3}{7} < \frac{5x + 3}{7} \leqq \frac{\frac{260}{9} + 3}{7}$$

bzw. $\frac{11}{9} < \frac{5x + 3}{7} \leqq \frac{41}{9}$, also kann der Ausdruck

$\frac{5x + 3}{7}$ (da er ganzzahlig ist) nur gleich

einer der Zahlen 2; 3;4 sein.

Aus $\frac{5x + 3}{7} = 2$ folgt $x = \frac{11}{5}$

aus $\frac{5x + 3}{7} = 3$ folgt $x = \frac{18}{5}$ und

aus $\frac{5x + 3}{7} = 4$ folgt $x = 5$

Also können höchstens $x = \frac{11}{5}$, $x = \frac{18}{5}$, $x = 5$

Lösungen von (1) sein.

Tatsächlich sind dies Lösungen; denn es gilt:

$$\left[\frac{10 + \frac{33}{5}}{6}\right] = 2 \quad \text{und} \quad \frac{\frac{55}{5} + 3}{7} = 2;$$

$$\left[\frac{10 + \frac{54}{5}}{6}\right] = 3 \quad \text{und} \quad \frac{\frac{90}{5} + 3}{7} = 3;$$

$$\left[\frac{10 + 15}{6}\right] = 4 \quad \text{und} \quad \frac{25 + 3}{7} = 4;$$

kurlauft

L 9;II X. Olympiade Junger Mathematiker
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 9 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

9/III/4) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, ein Tripel (x,y,z) sei Lösung von (1), (2). Dann ergibt sich, indem man z.B. $x = 2 - y$ in (2) einsetzt,

$y^2 - 2y + z^2 + 1 = 0$, also

(3) $(y-1)^2 + z^2 = 0$.

Wäre nun $y \neq 1$ oder $z \neq 0$, so folgte $(y - 1)^2 > 0$ bzw. $z > 0$, also, da stets $(y - 1)^2 \geqq 0$ und $z^2 \geqq 0$ ist, in jedem Falle $(y - 1)^2 + z^2 > 0$ im Widerspruch zu (3). Daher folgt aus (3), daß $y = 1$ und $z = 0$ sein muß.*

Aus (1)folgt dann $x = 1$. Also kann höchstens das Tripel $(1,1,0)$ Lösung des Gleichungssystems (1), (2) sein.

Tatsächlich ist dies Lösung; denn für $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ wird $x + y = 1 + 1 = 2$ und $xy - z^2 = 1 - 0 = 1$.

9/III/5) Lösung: 6 Punkte

Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h$, wobei G den Inhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe bedeutet.

---

* Oder: Es gilt (4) $z^2 \geqq 0$ sowie wegen (3) auch (5) $z^2 = -(y-1)^2 \leqq 0$. Aus (4) und (5) folgt $z^2 = 0$, also $z = 0$. Hieraus und aus (5) ergibt sich $(y - 1)^2 = 0$, also $y = 1$.

30 04 49-1

Da 3; 4; 5 und 5; 12;13 pythagoreische Zahlentripel sind, sind nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ rechtwinklig mit den rechten Winkeln $\sphericalangle BAC$ bzw. $\sphericalangle CBD$.

Da laut Aufgabe auch $\sphericalangle ABD$ ein rechter Winkel ist, steht BD senkrecht auf der Ebene, in der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt.

Wählt man nun die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ als Grundfläche der Pyramide, dann ist BD die zugehörige Höhe, und man erhält

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 12 \quad cm^3$$

$$V = 24 \ cm^3.$$

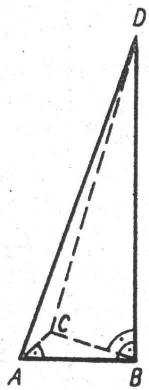

Abb. L 9;5

9/III/6) <u>Lösung:</u>

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 9;6). 3 Punkte

Punkt D sei derjenige auf dem Strahl CA gelegene Punkt, für den $\overline{AD} = \overline{AB}$ mit A zwischen C und D gilt, und Punkt E derjenige auf dem Strahl AC

gelegene Punkt, für den $\overline{CE} = \overline{CB}$ mit C zwischen A und E gilt.
Dann gilt
$\overline{DE} = a + b + c$.

Ferner sind die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ gleichschenklig. Daher und unter Berücksichtigung des Außenwinkelsatzes folgt, daß $\sphericalangle CEB$ die Größe $\frac{\gamma}{2}$ und $\sphericalangle ADB$ die Größe $\frac{\alpha}{2}$ hat.

Mithin enthält das Dreieck $\triangle EDB$ als bekannte Stücke die Seite

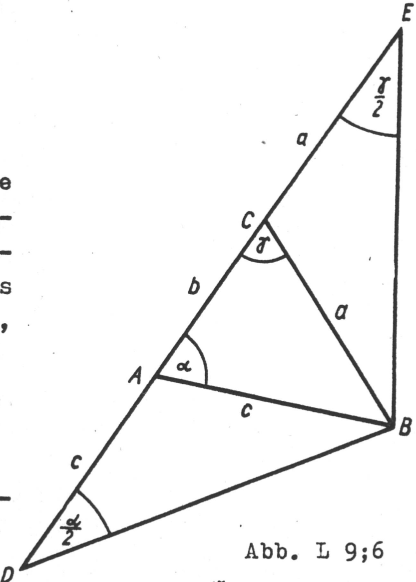

Abb. L 9;6

$a + b + c$ und Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$.
Ferner gilt auch $\overline{\sphericalangle DBA} = \frac{\alpha}{2}$ und $\overline{\sphericalangle EBC} = \frac{\gamma}{2}$ *)

(II) Daraus ergibt sich, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann: 2 Punkte

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle EDB$ aus $\overline{DE} = a + b + c$, $\overline{\sphericalangle BDE} = \frac{\alpha}{2}$, $\overline{\sphericalangle BED} = \frac{\gamma}{2}$.

(2) Man trägt in B an den Strahl BD einen Winkel der Größe $\frac{\alpha}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und D an, auf der E liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE, so sei der Schnittpunkt A genannt.

---

*) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$.

(3) Man trägt in B an den Strahl BE einen Winkel der Größe $\frac{\gamma}{2}$ auf derjenigen Seite der Geraden durch B und E an, auf der D liegt. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke DE und liegt der Schnittpunkt zwischen A und E, so sei er C genannt.

(III) Der Beweis, daß ein so entstandenes Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich folgendermaßen: — 2 Punkte

Laut Konstruktion gilt:

$\overline{ED} = a + b + c$

Die Dreiecke $\triangle ADB$ und $\triangle CBE$ sind gleichschenklig mit $\overline{AD} = \overline{AB}$ bzw. $\overline{CE} = \overline{CB}$.

Ihre Basiswinkel haben die Größe $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\gamma}{2}$. Dann haben die Winkel $\sphericalangle CAB$ bzw. $\sphericalangle BCA$ als Außenwinkel in den Dreiecken $\triangle ADB$ bzw. $\triangle CBE$ die Größen α bzw. γ. Schließlich hat auch (da A zwischen D und E sowie C zwischen A und E liegt) $\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}$ die verlangte Größe $(\overline{EC} + \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{DE} =) = a + b + c$.

(IV) Da in jedem Dreieck mit zwei Innenwinkeln α, γ die Beziehung $\alpha + \gamma < 180^\circ$ gilt, kann die Konstruktion nur möglich sein, wenn diese Beziehung erfüllt ist. — 1 Punkt

Ist dies der Fall, so gilt:

Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig (bis auf Kongruenz) durchführbar, da erst recht $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ $(< 90^\circ) < 180^\circ$

gilt. Dabei ergibt sich
$\overline{\sphericalangle DBE} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

also erst recht $\overline{\sphericalangle DBE} > \frac{\alpha}{2}$, so daß die

Konstruktion von A (Konstruktionsschritt (2)) ebenfalls eindeutig möglich ist. Schließlich folgt
$\overline{\sphericalangle EBA} = \overline{\sphericalangle DBE} - \frac{\alpha}{2} > 90^\circ - \frac{\alpha}{2} > \frac{\gamma}{2}$, so

daß auch C (zwischen A und E) eindeutig bestimmt ist (Konstruktionsschritt (3)).

Daher ist für $\alpha + \gamma < 180^\circ$ die gesamte Konstruktion (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar.

insgesamt 8 Punkte