

A 9;I

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR  
3. Stufe (Bezirksolympiade)  
Olympiadeklasse 9 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9/III/1) Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt.

Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt.

Ferner ist folgendes bekannt:

- (1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.
- (2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.
- (3) Er hatte an diesen Tagen genau 13 mal nachmittags keinen Tischdienst.
- (4) Er hatte an diesen Tagen genau 11 mal vormittags keinen Tischdienst.

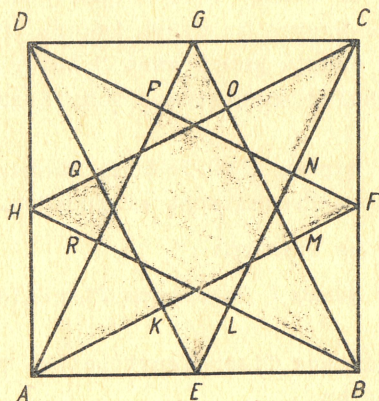
Aus wievielen Schülern bestand Günters Gruppe?



A 9;I

9/III/2) In einem Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet. In dem Streckenzug A F D E C H B G A auftretende Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, Q, R bezeichnet, daß AKELBMFNCOGPDQHR ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (s. Abb. A 9;2)

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!



A 9;2

9/III/3) Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute  $[x]$  die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

(So ist z.B.  $[3,7] = 3$ ,  $[-3,7] = -4$ ,  $[4] = 4$ .)

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$\left[ \frac{10 + 3x}{6} \right] = \frac{5x + 3}{7} \quad \text{gilt!}$$

4. Ermitteln Sie alle geordneten Tripel reeller Zahlen  $(x, y, z)$ , die Lösungen des Gleichungssystems

- 31 -

(1)  $x + y = 2$

(2)  $xy - z^2 = 1$  sind!

5. Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen  $\overline{AB} = 4$  cm,  $\overline{AC} = 3$  cm,  $\overline{BC} = 5$  cm,  $\overline{BD} = 12$  cm,  $\overline{CD} = 13$  cm, und  $\sphericalangle ABD$  sei ein rechter Winkel.

Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

6. Es ist ein Dreieck  $\triangle ABC$  aus  $a+b+c$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und  $\alpha$ ,  $\gamma$  die Größen der Winkel  $\sphericalangle CAB$ ,  $\sphericalangle ACB$ .

Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!