

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

9/II/1) Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich.

Anschließend macht jeder von ihnen die im folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei sind.

A (1) Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C.

(2) Ich habe den Brief nicht.

(3) Mein Freund hat den Brief.

B (1) Entweder A oder C hat den Brief.

(2) Alle Aussagen von A sind wahr.

(3) D hat den Brief nicht.

C (1) Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B.

(2) Ich habe den Brief.

(3) B macht keine falschen Aussagen.

D (1) Ich habe den Brief nicht.

(2) Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht.

(3) B hat das Spiel ausgedacht.

Wer hat den Brief?

9/II/2) Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von  $a$  und  $b$  diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!

b) Beweisen Sie diesen Satz!

9/II/3) Gegeben seien zwei reelle Zahlen  $m \neq 0$  und  $n$ . Ferner sei  $f$  die durch  $f(x) = mx + n$  für alle reellen Zahlen  $x$  definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für  $m = 1$  und  $n = 0$  alle Zahlen  $x_0$ , für die  $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$  gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle  $x_0 + 2$  doppelt so groß ist wie der an der Stelle  $x_0$ )!

b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen  $m \neq 0$  und  $n$  alle Zahlen  $x_0$ , für die  $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$  gilt!

9/II/4) Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.

In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche  $60^\circ$  groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge  $a$ .

Berechnen Sie das Volumen  $V$  dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist  $P$  ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in  $P$  auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.