A 8 X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Olympiadeklasse 8

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

8/II/1) In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der nebenstehenden Figur (Abb. A 8;1) sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, daß die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.

a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!

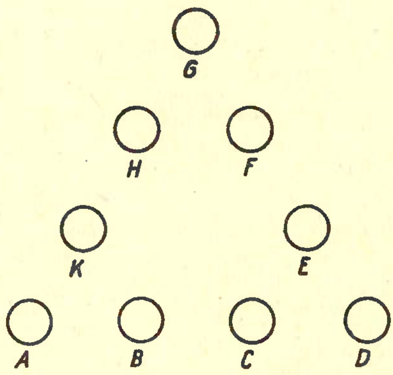

Abb. A 8;1

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

8/II/2) In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei.
Man beweise, daß

$$\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$$ gilt!

8/II/3) Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen.
Bekannt ist, daß Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.
Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung!
(Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

8/II/4) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus
$c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!
Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt.

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 8

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe

8/II/1) Lösung: 8 Punkte

Die in die Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K eingetragenen Zahlen seien a, b, c, d, e, f, g, h, k genannt.
Dann gilt für

$$s_1 = a + b + c + d,\quad s_2 = d + e + f + g,\quad s_3 = g + h + k + a \qquad (1)$$

laut Aufgabenstellung $s_1 = s_2 = s_3$ (2)
und

$$a + b + c + d + e + f + g + h + k = 45 \qquad (3).$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$3s_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 45 + a + d + g.$$

Daher ist $3s_1$ und folglich s_1 dann am kleinsten (bzw. am größten), wenn jeweils dasselbe für die Summe $a + d + g$ gilt. Die kleinste (bzw. größte) Summe, die aus drei verschiedenen der natürlichen Zahlen 1, ..., 9 gebildet werden kann, ist $1 + 2 + 3 = 6$ (bzw. $7 + 8 + 9 = 24$). Daher kann der kleinste Wert von s_1 nicht kleiner als $(45 + 6) : 3 = 17$ sein (bzw. der größte nicht größer als $(45 + 24) : 3 = 23$). Wenn man nun noch je eine der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eintragungen finden kann, bei denen $s_1 = 17$ (bzw. $s_1 = 23$) wird, so ist einerseits gezeigt, daß diese beiden Werte schon selbst der kleinste bzw. größte Wert von s_1 sind, und andererseits sind damit auch zwei Möglichkeiten derart gefunden, wie es in b) verlangt war. Zwei solche Eintragungen sind z.B.:

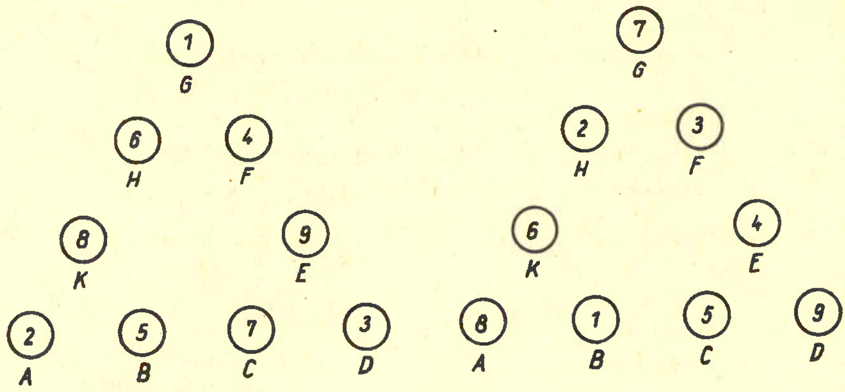

Abb. L 8;1

8/II/2) <u>Lösung:</u> 10 Punkte

Laut Aufgabe gilt:

$\overline{AB'} = \overline{B'C}$ und $\overline{MB'} = \overline{BM}$.

Die Parallele durch B' zu AA' ist für das Dreieck $\triangle AA'C$ eine Mittelparallele. Sie schneidet BC in einem Punkt, der zwischen A' und C liegt und A'' genannt sei. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

$\overline{BA'} : \overline{A'A''} = \overline{BM} : \overline{MB'} = 1 : 1$ (1)

$\overline{A'A''} : \overline{A''C} = \overline{AB'} : \overline{B'C} = 1 : 1$ (2)

Aus (1) und (2) folgt

$\overline{BA'} = \overline{A'A''} = \overline{A''C}$ und daraus

$\overline{BC} = 3\ \overline{BA'}$, w.z.b.w.

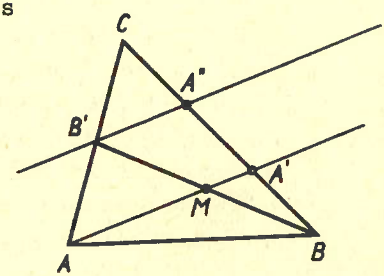

Abb. L 8;2

8/II/3) Lösung: 10 Punkte

Das Gewicht des Kupferanteils in der Legierung sei x kp. Dann beträgt das Gewicht des Zinkanteils (216 - x) kp.

Beim Eintauchen in Wasser beträgt der Gewichtsverlust des Kupferanteils $\frac{1}{9}$ x kp und der des Zinkanteils $\frac{1}{7}$ (216 - x) kp. Daher gilt:

$\frac{1}{9} x + \frac{1}{7} \cdot (216 - x) = 26$, woraus man

$7 x + 9 (216 - x) = 63 \cdot 26$, also

$2 x = 9 \cdot 216 - 63 \cdot 26 = 9 \cdot 34$ und daraus

$x = 153$ erhält.

Der Kupferanteil kann daher nur 153 kp, der Zinkanteil nur 216 kp - 153 kp = 63 kp betragen haben. Wegen 153 : 216 $\approx$ 0,708 betrug der prozentuale Anteil des Kupfers rund 71 %, der des Zinks rund 29 %.

8/II/4) Lösung: 12 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle$ ABC sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (Abb. L 8;4).

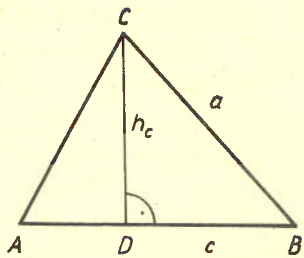

Abb. L 8;4

Der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei D. Dann enthält das Teildreieck $\triangle$ CDB, sofern es nicht mit D = B entartet ist, als bekannte Stücke a, h_c und den rechten Winkel $\sphericalangle$ CDB. Punkt A liegt erstens auf der Geraden durch B und D und zweitens auf dem Kreis um B mit c.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Teildreieck $\triangle$ CDB aus $\overline{BC} = a$, $\overline{CD} = h_c$ und dem rechten Winkel $\sphericalangle$ CDB. Der Entartungsfall D = B tritt nicht auf, da für die gegebenen Werte $h_c < a$ gilt.

(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und B.

(3) Wir schlagen den Kreis um B mit c. Schneidet er die Gerade durch D und B, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, daß jedes so erhaltene Dreieck $\triangle$ ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion ist $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$, $\overline{CD} = h_c$ und CD die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $h_c < a$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium ssw eindeutig möglich, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (Wie sich (1) [und (2)] für $h_c = a$ gestalten würde, braucht bei den gegebenen Werten nicht untersucht zu werden.) Konstruktionsabschnitt (2) ist stets eindeutig möglich, da sich wegen $h_c < a$ bei (1) $D \neq B$ ergeben hatte. Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2. Da nun der wegen $h_c < a$ spitze Winkel $\sphericalangle$ DBC in dem einen der beiden Dreiecke $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$ als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei B auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei B spitzwinklig, das andere bei B stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent (bei gleicher Reihenfolge A_1B, C bzw. A_2,B,C homologer Punkte)*) .

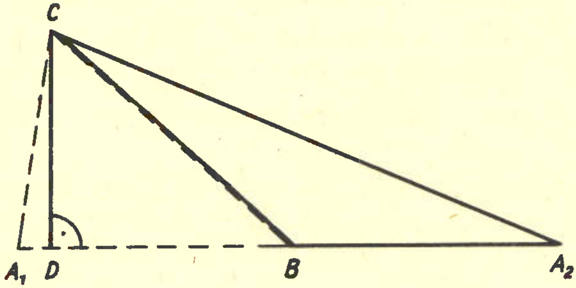

Abb. L 8;4a

Somit besitzt die Aufgabe genau diese beiden Dreiecke als Lösung.

---

*) Da nach dem Außenwinkelsatz der Winkel $\sphericalangle$DBC größer ist als jeder der beiden spitzen Winkel des bei B stumpfwinkligen unter den Dreiecken $\triangle A_1BC$, $\triangle A_2BC$, so sind diese beiden Dreiecke auch nicht kongruent bei anderer Reihenfolge homologer Punkte.

Jedoch ist dieser Nachweis im Sinne der Aufgabenstellung nicht erforderlich.