Krüger

A 7;I

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7/III/1) Während der Friedensfahrt fuhr an 6 Thälmannpionieren eine Spitzengruppe von Radrennfahrern so vorbei, daß man eine Reihenfolge eindeutig feststellen konnte. Um diese Reihenfolge zu ermitteln, gab jeder der 6 Pioniere seine Beobachtungen wieder, wobei sämtliche Aussagen wahr sind:

(1) In der Spitzengruppe waren genau 8 Fahrer, darunter genau ein Belgier und genau zwei Polen.

(2) Von den Fahrern, die vor dem Belgier fuhren, waren mindestens zwei DDR-Fahrer.

(3) Von den Fahrern, die vor den beiden Polen fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.

(4) Von den Fahrern, die hinter dem Belgier fuhren, war mindestens einer ein sowjetischer Fahrer.

(5) Zwei sowjetische Fahrer fuhren unmittelbar hintereinander.

(6) Am Anfang und am Schluß der Spitzengruppe fuhr jeweils ein DDR-Fahrer.

Ermittle die genaue Reihenfolge der Fahrer der Spitzengruppe!

7/III/2) Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.

Beweise, daß sich die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

30 04 49-1

A 7;1

7/III/3) Von den Schüler einer 8. Klasse gehören genau $\frac{3}{5}$ dem Schulchor und genau $\frac{7}{10}$ der Schulsportgemeinschaft an. Genau $\frac{2}{5}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse sind sowohl Mitglied des Chores als auch Mitglied der Schulsportgemeinschaft (SSG).
Berechne, der wievielte Teil der Anzahl aller Schüler dieser Klasse weder im Chor noch in der SSG ist!

A 7;II X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7/III/4) Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:

"Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert.

Nenne die Anzahl der Plaumen, die der Korb enthält!"

7/III/5) Aus den zweistelligen Primzahlen 13, 17, 37, 39 erhält man wieder Primzahlen, wenn man ihre Ziffern jeweils vertauscht, also die Zahlen 31, 71, 73, 97 bildet. Ebenso kann man bei der Primzahl 131 die Ziffern beliebig vertauschen, also die Zahlen 113, 311 bilden, ohne daß die Primzahleigenschaft verloren geht.

Gibt es dreistellige Primzahlen mit paarweise voneinander verschiedenen Ziffern, bei denen sämtliche möglichen Ziffernvertauschungen stets wieder dreistellige Primzahlen ergeben?

(Ohne Benutzung der Zahlentafel)

7/III/6) Konstruiere ein Dreieck $\triangle$ ABC aus

$a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!

Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $\overline{CD} = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

7/III/1) Lösung: 6 Punkte

Die belgischen Fahrer, DDR-Fahrer, polnischen und sowjetischen Fahrer seien der Reihe nach mit B, D_1, D_2, ..., P_1, P_2, S_1, S_2, ... bezeichnet.
Nach (5) waren mindestens zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe.
Nach (2) fuhr mindestens ein DDR-Fahrer weder am Anfang noch am Ende, wegen (6) waren also mindestens drei DDR-Fahrer in der Spitzengruppe.
Wegen (1) müssen diese Mindestanzahlen, 2 sowjetische, 3 DDR-Fahrer, auch bereits die genauen Anzahlen der sowjetischen bzw. DDR-Fahrer sein. Sind X, Y Bezeichnungen von Fahrern, so bedeute $X < Y$, daß X vor Y fuhr. Dann gilt

(2) $D_1 < D_2 < B$,
(3) $S_1 < P_1 < P_2$,
(4) $B < S_2$.

Da genau ein Belgier in der Spitzengruppe fuhr, folgt aus (2) und (4)

(7) $D_1 < D_2 < B < S_2$.

Da genau zwei sowjetische Fahrer in der Spitzengruppe und nach (5) unmittelbar hintereinander fuhren, folgt daraus sowie aus (3) und (7)

(8) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2$.

Aus (6) und (8) folgt

(9) $D_1 < D_2 < B < S_1 < S_2 < P_1 < P_2 < D_3$.

Damit sind bereits 8 Fahrer erfaßt, also ist (9) die einzige Möglichkeit für die gesuchte Reihenfolge.

7/III/2) Lösung: 7 Punkte

Da F eindeutig bestimmt ist, ist F aufgrund der Voraussetzungen von P und S verschieden. Daher sind P, S, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel bei F (Abb. L 7;2).

Dann schneidet bekanntlich die Halbierende des Winkels $\sphericalangle$ PSF die Strecke PF in einem Punkt, der mit M bezeichnet werde. Dabei hat der Winkel $\sphericalangle$ MSP eine Größe von 30°. Außerdem hat der Winkel $\sphericalangle$ SPF als Komplementwinkel des Winkels $\sphericalangle$ PSF eine Größe von 30° (Winkelsumme im Dreieck $\triangle$ PSF). Daher ist $\triangle$ PSM gleichschenklig mit $\overline{PM} = \overline{MS}$. Infolgedessen liegt M auf der Mittelsenkrechten von PS.

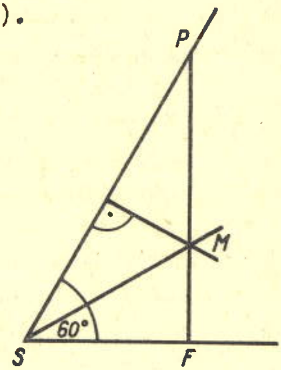

Abb. L 7;2

Anderer Lösungsweg:

Die Fläche des Dreiecks $\triangle$ SFP läßt sich als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. In jedem gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen mit den entsprechenden Winkelhalbierenden zusammen und schneiden sich daher in einem und demselben Punkt, der gleichzeitig auch der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist.

L 7;I

7/III/3) **Lösung:** 6 Punkte

Laut Aufgabe sind $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ der Anzahl aller Schüler der Klasse Mitglieder des Chores, aber nicht Mitglieder der SSG; und $\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ der Anzahl der Schüler sind Mitglieder der SSG, aber nicht Mitglieder des Chores. Berücksichtigt man noch die $\frac{2}{5}$ der Anzahl der Schüler dieser Klasse, die beiden angehören, so verbleibt wegen

$\frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$ genau $\frac{1}{10}$ der Anzahl aller Schüler dieser Klasse, und genau soviel sind weder im Chor noch in der SSG.

L 7;II X. Olympiade JungerMathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 7 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

7/III/4) Lösung: 6 Punkte

Der dritte Freier sollte (bevor er "noch drei Pflaumen" bekommen sollte) zuerst eine Hälfte des "nunmehrigen Restes" erhalten. Was danach verblieb, war also ebenfalls eine Hälfte des "nunmehrigen Restes", und da diese drei Pflaumen betrug, hatte der "nunmehrige Rest" aus doppelt so viel, d.h. aus 6 Pflaumen bestanden.
Der zweite Freier sollte (bevor er "noch eine Pflaume" erhalten sollte) zuerst eine Hälfte des "Restes" bekommen.

Was danach verblieb, war also gleichfalls die Hälfte des "Restes", und da diese aus (einer Pflaume sowie noch 6 Pflaumen als "nunmehrigen Rest", d.h. zusammen aus) 7 Pflaumen bestand, hatte der erwähnte "Rest" 14 Pflaumen betragen. Der erste Freier sollte (bevor er "noch eine Pflaume" erhalten sollte) zuerst die Hälfte des "Inhalts" bekommen. Was danach verblieb, war ebenfalls eine Hälfte des "Inhalts", und da diese aus (einer Pflaume sowie noch 14 Pflaumen als "Rest", d. h. zusammen aus) 15 Pflaumen bestand, hatte der "Inhalt" 30 Pflaumen betragen.

Anderer Lösungsweg:

Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste

30 04 49-1

Freier $(\frac{x}{2} + 1)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl

$x - (\frac{x}{2} + 1) = \frac{x}{2} - 1$. Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach $\frac{\frac{x}{2} - 1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $(\frac{x}{2} - 1)-(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$.

Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$$\frac{\frac{x}{4} - \frac{3}{2}}{2} + 3 = \frac{x}{8} + \frac{9}{4} .$$

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung

$$(\frac{x}{4} - \frac{3}{2}) - (\frac{x}{8} + \frac{9}{4}) = 0$$

folgt. Aus dieser ergibt sich

$$\frac{x}{8} = \frac{15}{4},$$

also $x = 30$.

Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

7/III/5) Lösung: 6 Punkte

Angenommen, es gäbe eine derartige dreistellige Primzahl. Dann könnte sie nur aus drei verschiedenen der Ziffern 1, 3, 7, 9 bestehen, da bei den Vertauschungen jede ihrer Ziffern auch einmal an letzter Stelle stünde und daher, wie man mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln erkennt, die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, 8 entfielen. Also müßte die Primzahl entweder aus den Ziffern

1, 3, 7

oder aus den Ziffern 1, 3, 9

oder aus den Ziffern 1, 7, 9

oder aus den Ziffern 3, 7, 9 bestehen.

Nun ist aber z.B. $371 = 7 \cdot 53$
$319 = 11 \cdot 29$
$791 = 7 \cdot 113$
$793 = 13 \cdot 61$,

d.h. es gibt in jedem Falle unter den durch Vertauschungen der Ziffern entstehenden Zahlen wenigstens eine, die nicht Primzahl ist. Daher gibt es keine dreistellige Primzahl mit der geforderten Eigenschaft.

7/III/6) Lösung: 9 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll (Abb. L 7;6).
Der Mittelpunkt von AB sei D; der Punkt E sei derjenige auf dem Strahl CD gelegene von C verschiedene Punkt, für den $\overline{CD} = \overline{DE}$ gilt. Dann ist AEBC ein Parallelogramm, da sich AB und CE gegenseitig halbieren.
Also ist $\overline{AE} = \overline{CB} = a$.

(II) Daher kann ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann der Aufgabenstellung entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen die Strecke CD der Längs s_c.
(2) Wir zeichnen den Strahl CD.
(3) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{CD} = s_c$; der von C verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl CD sei E.
(4) Wir schlagen um C und E die Kreise mit den Radien b bzw. a. Ist A einer ihrer Schnittpunkte, so zeichnen wir den Strahl AD.

(5) Wir schlagen den Kreis um D mit $\overline{AD}$; der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl AD sei B.

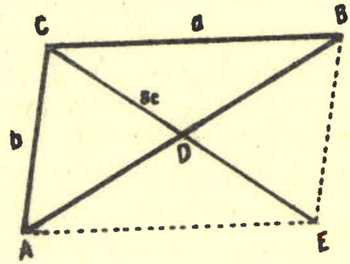

Abb. L 7;6

(III) Beweis, daß ein so konstruiertes Dreieck der Aufgabenstellung entspricht:
Nach Konstruktion ist $\overline{AC} = b$.
Ferner ist $\overline{AD} = \overline{DB}$, also CD Seitenhalbierende, und ihre Länge ist nach Konstruktion $\overline{CD} = s_c$.
Schließlich ist AEBC ein Parallelogramm, da sich die Diagonalen AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $\overline{CB} = \overline{AE} = a$.

(IV) Wegen $a - b < 2\ s_c < a + b$ sind alle Konstruktionsschritte durchführbar, also gibt es ein Dreieck, das der Aufgabenstellung entspricht. Dieses ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, da der einzige möglicherweise mehrdeutige Konstruktionsschritt (4) dann zu zwei zu der Geraden durch C und E symmetrischen und damit kongruenten Figuren führt.