A 7

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 7

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

7/II/1) In einem Ferienlager der Thälmann-Pioniere erwarben genau 70 % aller Teilnehmer das Sportabzeichen und genau 30 % aller Teilnehmer das Touristenabzeichen. Vorher besaß kein Teilnehmer eines dieser Abzeichen.
Bei den folgenden Aussagen (1) bis (4), die sich sämtlich auf dieses Lager beziehen, ist zu untersuchen, ob sie wahr sind oder falsch sind oder ob das allein aufgrund der gemachten Angaben nicht entschieden werden kann:

(1) Weniger als die Hälfte aller Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, erwarben auch das Touristenabzeichen.

(2) Alle Teilnehmer erwarben entweder das Sportabzeichen oder das Touristenabzeichen.

(3) Unter den Trägern des Sportabzeichens gibt es mehr solche, die auch das Touristenabzeichen erwarben, als solche, die dies nicht taten.

(4) Wenn sich die Anzahl der Pioniere, die das Sportabzeichen erwarben, um 10 % erhöhen würde, so gäbe es mehr Träger des Sportabzeichens als Träger des Touristenabzeichens.

30 04 48-1 203•1000/70 (E)

7/II/2) In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größen der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60^\circ$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ und CC' die des Winkels $\sphericalangle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C'). Ferner seien die Größen der Winkel $\sphericalangle AB'B$ bzw. $\sphericalangle AC'C$ mit ε bzw. δ bezeichnet.
Beweise, daß für jedes derartige Dreieck $\varepsilon + \delta = 180^\circ$ gilt!

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

7/II/3) Ermittle alle Möglichkeiten, eine natürliche Zahl t und eine Ziffer ✱ so anzugeben, daß die folgende Gleichung gilt:

$$9\,(230 + t)^2 = 492\,{*}04$$

7/II/4) Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus

$$\alpha = 70^\circ, \quad s_b = 7 \text{ cm}, \quad h_c = 5 \text{ cm!}$$

Dabei sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

L 7

X. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 7

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

7/II/1) **Lösung:** 8 Punkte

(je 2 Punkte

Aussage (1) ist wahr, weil höchstens 30 % aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten und 30 % weniger als die Hälfte von 70 % sind.

Bei Aussage (2) kann allein mit den vorliegenden Angaben nicht entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist . Sie ist genau dann wahr, wenn jeder Teilnehmer genau ein Abzeichen erworben hat.

Aussage (3) ist falsch, weil höchstens 30 % aller Teilnehmer beide Abzeichen erworben haben konnten, also mindestens 40 % aller Teilnehmer nur das Sportabzeichen erhielten.

Aussage (4) ist wahr, weil es (bereits vor, also erst recht) nach einer Erhöhung der Anzahl der Sportabzeichenträger von diesen mehr gibt als Träger des Touristenabzeichens.

7/II/2) **Lösung:** 10 Punkte

Laut Voraussetzung gilt $\alpha = 60^\circ$. Dann gilt unter Benutzung des Winkelsummensatzes ($\triangle ABC$)
$\beta + \gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner:

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\beta}{2} \qquad (\triangle B'BC)$$

sowie $$\delta = \beta + \frac{\gamma}{2} \qquad (\triangle C'BC) .$$

30 04 48-1 230•1000/70 (E)

Daraus folgt

$$\varepsilon + \delta = \frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2} \cdot 120^\circ = 180^\circ ,$$

w.z.b.w.

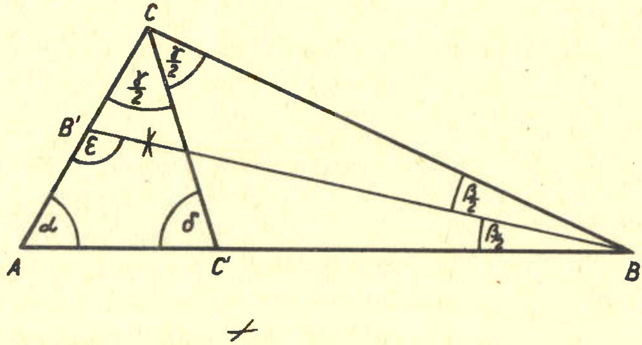

Abb. L 7;2

7/II/3) <u>Lösung:</u> 10 Punkte

Angenommen, die Gleichung hat eine Lösung. Dann müssen beide Seiten durch 9 teilbar sein. Wegen 4 + 9 + 2 + 0 + 4 = 19 folgt daraus ✱ = 8. Die Zahl auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung kann also nur 492804 lauten. Dann folgt aus der Gleichung weiter $(230 + t)^2 = 492804 : 9 = 54\ 756$, und daher erhält man:

230 + t ist eine natürliche Zahl, nicht kleiner als 230 und so beschaffen, daß ihr Quadrat 54756 beträgt.

Daraus folgt, daß für t nur der Wert 4 möglich ist. Weil nämlich 54756 auf 6 endet, kann t nur auf 4 oder 6 enden. Wäre $t > 4$, so wäre $(230 + t)^2 > 234^2 = 54756$.

Also ist nur t = 4 möglich.

Wie die Probe zeigt, ist t = 4; ✱ = 8 Lösung der gegebenen Gleichung, und zwar die einzige.

7/II/4) <u>Lösung:</u> 12 Punkte

(I) Angenommen, $\triangle$ ABC sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll (Abb. L 7;4).

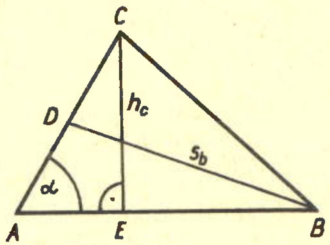

Abb. L 7;4

Der Mittelpunkt von AC sei D, der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei E. Dann liegt E wegen $\alpha < 90^0$ auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, und es läßt sich das Teildreieck $\triangle$AEC aus h_c, α und dem rechten Winkel $\sphericalangle$AEC konstruieren.
Punkt B liegt erstens auf dem von A ausgehenden Strahl durch E und zweitens auf dem Kreis mit s_b um D.

(II) Daraus folgt, daß ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle$AEC aus h_c, α und dem rechten Winkel $\sphericalangle$ AEC.

(2) Wir konstruieren den Mittelpunkt D der Strecke AC.

(3) Wir konstruieren den von A ausgehenden Strahl durch E.

(4) Wir schlagen um D mit s_b den Kreis. Schneidet er den Strahl AE, so sei B einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, daß jedes auf diese Weise konstruierbare Dreieck $\triangle$ABC tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach

Konstruktion ist $\overline{DB} = s_b$, $\overline{CE} = h_c$, und der Winkel $\sphericalangle CAB$ hat die Größe α. Ferner ist D der Mittelpunkt, also BD die Seitenhalbierende von AC. Schließlich ist nach Konstruktion $CE \perp AB$, also CE auf AB und damit die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $\alpha < 90^\circ$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium sww eindeutig. Ferner ist (2) stets eindeutig möglich, ebenso (3), da wegen (1) $A \neq E$ ist.
Schließlich ist auch (4) nach sww eindeutig möglich, da für die gegebenen Größen α und h_c die Strecke DA kleiner als s_b ausfällt. Folglich ist die gesamte Konstruktion mit den gegebenen Stücken eindeutig.

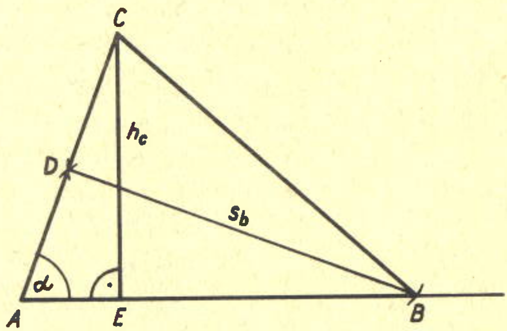

Abb. L 7;4a