A 11/12;I

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12;1) An einem internationalen Zeltlager nimmt eine Gruppe von 30 Freunden teil, von denen ein Teil Deutsch, ein Teil Russisch und ein Teil Französisch beherrschen, und zwar beherrschen einige Freunde nur eine Sprache, einige zwei Sprachen und einige sogar drei Sprachen.

Die Anzahl der Freunde, die genau zwei Sprachen beherrschen, ist mehr als doppelt so groß, jedoch weniger als dreimal so groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen. Die Anzahl der Teilnehmer, die alle drei Sprachen beherrschen, ist ebenso groß wie die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen.

Die Anzahl der Freunde, die nur Deutsch beherrschen, ist größer als die Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen, aber kleiner als die Anzahl derjenigen, die nur Französisch beherrschen. Die Anzahl derjenigen, die nur Deutsch beherrschen, ist kleiner als das Dreifache der Anzahl derjenigen, die nur Russisch beherrschen.

Geben Sie jeweils die Anzahl aller Teilnehmer dieser Gruppe an, die nur Deutsch, nur Russisch, nur Französisch, alle drei Sprachen beherrschen!

A 11/12;I

11/12;2) Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks $\triangle$ ABC möglichst klein ist.

11/12;3) Es ist zu beweisen, daß für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ die Funktion $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ höchstens eine reelle Nullstelle haben kann.

A 11/12;II

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12;4) Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit P_1, P_2, ..., P_n bezeichnet.

a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) können parallel zu sich selbst so verschoben werden, daß sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.

b) Es ist zu beweisen (z. B. mit Hilfe des Satzes unter a)), daß folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{n\,2\pi}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\,2\pi}{n} = 0 \qquad (2).$$

11/12;5) Es sind alle reellen Zahlen λ anzugeben, für die die Gleichung $\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\tan^4 x - \cot^4 x)$

a) keine

b) genau eine

c) genau zwei

d) mehr als zwei

reelle Lösungen im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ hat.

A 11/12;II

11/12;6) Es ist zu beweisen, daß für jedes Quadrupel positiver reeller Zahlen a, b, c, d die **Beziehung**

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

gilt, und es ist zu untersuchen, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

__Achtung:__ Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

11/12;1) __Lösung:__ 6 Punkte

Es sei die Anzahl aller Freunde dieser Gruppe, die

nur Deutsch beherrschen	x_1,
nur Russisch beherrschen	x_2,
nur Französisch beherrschen	x_3,
genau zwei Sprachen beherrschen	x_4,
alle drei Sprachen beherrschen	x_5.

Dann gilt

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30.$

Setzt man die Anzahl derjenigen, die nur eine Sprache beherrschen, gleich t, so gilt

$$t = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$t + x_4 + x_5 = 30$$

und $2t < x_4 < 3t$,

also wegen

$$t = x_5$$

$$4t < t + x_4 + x_5 < 5t,$$

und damit

$$4t < 30 < 5t.$$

Daraus folgt $t = 7$, d.h., genau 7 Teilnehmer beherrschen alle drei Sprachen.

Ferner gilt

$$x_2 < x_1 < x_3 \quad \text{und} \quad x_1 < 3x_2.$$

Daraus folgt aber

$$x_2 > 0,$$

also

$$x_2 \geqq 1, \quad x_1 \geqq 2, \quad x_3 \geqq 3.$$

Diese Bedingungen sind wegen $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ nur für

$x_2 = 1,\ x_1 = 2,\ x_3 = 4$

erfüllt; denn wäre

$x_2 \geqq 2,$

so wäre

$x_1 \geqq 3,\ x_3 \geqq 4,$

also

$x_1 + x_2 + x_3 \geqq 9$, was der obigen Voraussetzung widerspricht.

Wäre aber

$x_2 = 1$ und $x_1 \geqq 3,$

so wäre

$x_3 \geqq 4$, also

$x_1 + x_2 + x_3 \geqq 8$, was ebenfalls nicht möglich ist.

Daher können nur die Angaben

$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4,\ x_5 = 7$ den Bedingungen der Aufgaben entsprechen. Eine Probe zeigt, daß dies der Fall ist, d.h., genau zwei Teilnehmer beherrschen nur Deutsch, genau ein Teilnehmer nur Russisch, genau vier Teilnehmer nur Französisch und genau 7 Teilnehmer alle drei Sprachen.

11/12;2 <u>Lösung:</u> 6 Punkte

(siehe Abb. L 11/12;2)
Man betrachtet die Ebene ε, in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Man drehe die Ebene, die g und B enthält, so um g, daß das Bild B' von B bei dieser Drehung in der Ebene ε liegt, und zwar so, daß B' und A nicht auf derselben Seite von g liegen.

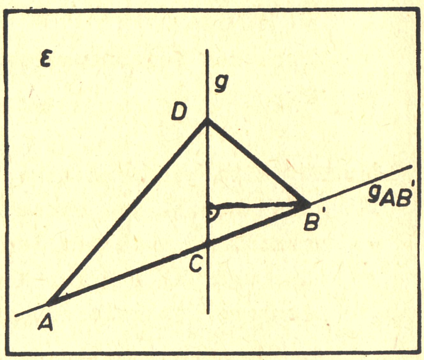

Abb. L 11/12;2

Der gemeinsame Punkt C der Strecke AB' und der Geraden g ist ein Punkt der geforderten Art, und zwar der einzige.

<u>Beweis:</u> D sei ein beliebiger Punkt der Geraden g. Dann gilt:
$\overline{DB} = \overline{DB'}$. Daher gilt auch: $\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB'}$.
Nun ist stets $\overline{AD} + \overline{DB'} \geqq \overline{AC} + \overline{CB'}$ (Dreiecksungleichung), und hierin gilt das Gleichheitszeichen genau für D = C.
Wegen $\overline{CB'} = \overline{CB}$ erhält man hieraus

$$\overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BA} \geqq \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA},$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau für D = C.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

11/12;3) <u>Lösung:</u> 7 Punkte

I. Für $x \geqq 0$ ist $f(x) \geqq 1 > 0$. Wenn also überhaupt eine reelle Nullstelle ξ existiert, kann sie nur negativ sein, und es gilt

$$f'(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} = f(\xi) - \frac{\xi^n}{n!}$$

$$= -\frac{\xi^n}{n!} \quad \left\{\begin{matrix} <0 \text{ für gerades } n \\ >0 \text{ für ungerades } n \end{matrix}\right\} .$$

II. Angenommen, f (x) habe mehr als eine Nullstelle. Da f (x) als Polynom nur endlich viele Nullstellen haben kann, gibt es dann zwei benachbarte Nullstellen $\xi_1 < \xi_2$, so daß wegen der Stetigkeit f (x) auf Grund des Zwischenwertsatzes für alle x mit $\xi_1 < x < \xi_2$ dasselbe Vorzeichen haben muß.

III. Für alle genügend nahe rechts von ξ_1 gelegenen x gilt nach I. und einem bekannten Satz über den Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen der 1. Ableitung und dem lokalen Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen, angewandt

auf ξ_1, $\left\{\begin{matrix} \text{bei geradem } n \\ \text{bei ungeradem } n \end{matrix}\right\}$ die Ungleichung $\left\{\begin{matrix} f(x) < f(\xi_1) = 0 \\ f(x) > f(\xi_1) = 0 \end{matrix}\right\}$.

IV. Für alle genügend nahe links von ξ_2 gelegenen x gilt nach I. und dem unter III. erwähnten Satz, angewandt

auf ξ_2, $\left\{\begin{matrix}\text{bei geradem } n \\ \text{bei ungeradem } n\end{matrix}\right\}$ die Ungleichung $\left\{\begin{matrix} f(x) > f(\xi_2) = 0 \\ f(x) < f(\xi_2) = 0\end{matrix}\right\}$.

Die Aussagen II., III., IV. bilden in jedem Fall einen Widerspruch, womit der verlangte Beweis geführt ist.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

11/12;4 Lösung:

Zu a): 3 Punkte

Wir definieren n + 1 Punkte $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$: Erstens sei Q_0 ein beliebiger Punkt. Ist zweitens für ein $k = 1, \ldots, n$ schon Q_{k-1} definiert, so sei Q_k das Bild von P_k, das sich ergibt, wenn man die Strecke MP_k parallel zu sich selbst verschiebt, so daß M auf Q_{k-1} fällt. Dann gilt:

Behauptung 1:

$$\overline{\sphericalangle Q_{k-1} Q_k Q_{k+1}} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle P_k M P_{k+1}} \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Beweis: Es sei R_{k+1} das Bild von P_{k+1}, das sich ergibt, wenn man die Strecke MP_{k+1} parallel zu sich selbst verschiebt, so daß M auf P_k fällt. Dann ist einerseits das Dreieck $\triangle Q_{k-1} Q_k Q_{k+1}$ aus dem Dreieck $\triangle MP_kP_{k+1}$ durch Parallelverschiebung hervorgegangen, also $\overline{\sphericalangle Q_{k-1} Q_k Q_{k+1}} = \overline{\sphericalangle MP_kR_{k+1}}$; andererseits ist $P_{k+1} MP_kR_{k+1}$ ein Parallelogramm, also $\overline{\sphericalangle MP_kR_{k+1}} = 180^\circ - \overline{\sphericalangle P_kMP_{k+1}}$.

Behauptung 2:

Jeder der Winkel $\sphericalangle Q_{k-1} Q_k Q_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ ist einem Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks kongruent; jede der Strecken $Q_{k-1} Q_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ hat die gleiche Länge.

Beweis: Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Definition der Parallelverschiebung und der Längengleichheit der MP_k, der erste folgt so:

Im regelmäßigen n-Eck $P_1P_2...P_n$ gilt $\overline{\sphericalangle P_{k-1} P_k P_{k+1}} =$
$= 2 \overline{\sphericalangle MP_kP_{k+1}} = \overline{\sphericalangle MP_k P_{k+1}} + \overline{\sphericalangle MP_{k+1} P_k} = 180^\circ -$
$- \overline{\sphericalangle P_k MP_{k+1}} = \overline{\sphericalangle Q_{k-1} Q_k Q_{k+1}}$ (s. Behauptung 1).

Behauptung 3:
Konstruiert man dasjenige regelmäßige n-Eck $S_oS_1...S_{n-1}$, dessen erste drei Ecken $S_o = Q_o$, $S_1 = Q_1$, $S_2 = Q_2$ sind, so gilt $S_k = Q_k$ $(k = 0, ..., n - 1)$ und $(Q_o =)$ $S_o = Q_n$.

Beweis: Aus der Behauptung 2 über Q_o, Q_1, Q_2 folgt zunächst, daß das genannte regelmäßige n-Eck mit dem Beginn $Q_oQ_1Q_2$ ... konstruiert werden kann. Aus der Richtigkeit von $S_o = Q_o$, ..., $S_{k-1} = Q_{k-1}$ folgt aus der Behauptung 2 über Q_{k-2}, Q_{k-1}, Q_k, daß $S_k = Q_k$ ist, wobei man sich für k jede der Zahlen 3, ..., n - 1 eingesetzt denken darf.

Damit ist $S_k = Q_k$ $(k = 0, ..., n - 1)$ gezeigt. Hiernach schließlich ist $Q_0Q_1...Q_{n-1}$ ein regelmäßiges n-Eck, weshalb aus der Behauptung 2 über Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n auch $S_o = Q_n$ folgt.
Mit dem Beweis der Behauptung 3 ist der in a) geforderte Nachweis erbracht.

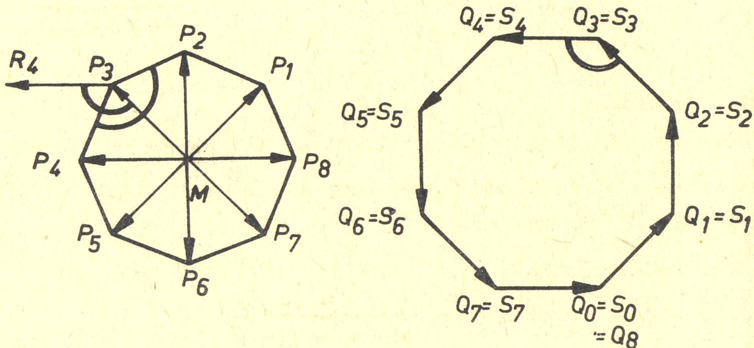

Abb. L 11/12;4

Zu b) 3 Punkte

Führt man ein rechtsorientiertes kartesisches Koordinatensystem ein, in dem M der Ursprung und durch $\overrightarrow{MP_n}$ die positive x-Achsenrichtung festgelegt ist, so folgt aus der Aussage a) die Aussage

(1) $\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} + \ldots + \overrightarrow{MP_n} = \mathfrak{o}$ (vektorielle Gleichung).

Für den Vektor $\overrightarrow{MP_k}$ gilt:

$$\overrightarrow{MP_k} = r\left(\cos \frac{k\,2\pi}{n}\,\mathfrak{i} + \sin \frac{k\,2\pi}{n}\,\mathfrak{j}\right)$$

(r: Radius des Umkreises, $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ Achseneinheitsvektoren).

Setzt man diese Beziehung in (1) ein und setzt man die Koordinaten der beiden Seiten einzeln gleich, so erhält man die Behauptung.

Ergänzung zu b): Die Behauptung folgt (bei Voraussetzung der entsprechenden Kenntnisse über algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen) aus der Betrachtung der n-ten Einheitswurzeln, d.h. der n Lösungen der Gleichung $x^n - 1 = 0$. Ihre Summe verschwindet, da der Koeffizient von x^{n-1} verschwindet (Satz von Vieta). Die Summen ihrer Real- und Imaginärteile verschwinden daher auch, womit (1) und (2) bewiesen sind.

zusammen 6 Punkte

11/12;5) Lösung: 7 Punkte

Die reelle Zahl x mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist genau dann Lösung der gegebenen Gleichung, wenn sie Lösung einer der folgenden 3 Gleichungen ist:

(1) $\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda\,(\tan^4 x - \cot^4 x)$

(2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda\,\dfrac{\sin^8 x - \cos^8 x}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$

(3) $\sin^4 x - \cos^4 x) \cdot \left[\sin^4 x \cdot \cos^4 x - \lambda\,(\sin^4 x + \cos^4 x)\right] = 0.$

Hieraus folgt, daß $x = \frac{\pi}{4}$ für jedes λ Lösung von (1) ist, und daß eine Zahl $x \neq \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ genau dann Lösung von (1) ist, wenn sie Lösung einer der Gleichungen (4), (5), (6), (7) ist.

(4) $\sin^4 x \cos^4 x = \lambda (\sin^4 x + \cos^4 x)$

(5) $\frac{1}{16} \sin^4 2x = \lambda \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x\right]$

(6) $\frac{1}{16} \sin^4 2x = \lambda \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right]$

(7) $\sin^4 2x + 8 \cdot \lambda \cdot \sin^2 2x - 16 \lambda = 0.$

Die Zahl $x \neq \frac{\pi}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ist genau dann Lösung von (7), wenn die Zahl $z = \sin^2 2x$ eine Lösung der Gleichung

(8) $z^2 + 8 \lambda z - 16 \lambda = 0$

ist, für die $0 < z < 1$ gilt. Dabei gehören zu jeder derartigen Lösung von (8) genau zwei Lösungen von (7) mit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{4}$.

Die Gleichung (8) hat genau dann eine reelle Lösung, wenn die Diskriminante $D = 16 \lambda^2 + 16 \lambda = 16 \lambda (\lambda + 1) \geq 0$ ausfällt.
Die beiden Lösungen lauten in diesem Fall

$z_1 = 4 \left[\sqrt{\lambda(\lambda + 1)} - \lambda\right]$ und $z_2 = -4 \left[\sqrt{\lambda(\lambda + 1)} + \lambda\right]$.

Für die Lösung z_2 gilt sicher nicht $0 < z_2 < 1$; denn anderenfalls müßte $0 > \sqrt{\lambda(\lambda + 1)} + \lambda > -\frac{1}{4}$, also

$$-\lambda > \sqrt{\lambda(\lambda + 1)} > -(\lambda + \tfrac{1}{4}) \qquad (9)$$

sein. Folglich wäre $\lambda < 0$ und wegen $D \geq 0$, $\lambda + 1 < 0$ also auch $\lambda + \frac{1}{4} < \lambda + 1 < 0$.

Daher ergäbe sich aus (9)

$$\lambda(\lambda + 1) > (\lambda + \tfrac{1}{4})^2,$$

also $$\lambda^2 + \lambda > \lambda^2 + \tfrac{1}{2} \lambda + \tfrac{1}{16},$$

d.h. $\lambda > \frac{1}{8}$, was mit $\lambda < 0$ unvereinbar ist.

Aus $D \geqq 0$ folgt, daß entweder $\lambda \geqq 0$ oder $\lambda \leqq -1$ ist, und aus $0 < z_1 < 1$ folgt

(10) $\quad \lambda < \sqrt{\lambda(\lambda+1)} < \lambda + \frac{1}{4}$, insbesondere also $\lambda > -\frac{1}{4}$, also wegen $D \geqq 0$: $\lambda \geqq 0$ und, da $\lambda = 0$ mit (10) unvereinbar ist, sogar $\lambda > 0$. Im Falle $\lambda > 0$ ist (10) äquivalent mit

$$\lambda^2 < \lambda^2 + \lambda < \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16},$$

$$0 < \lambda < \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16} \text{ und}$$

$$\lambda < \frac{1}{8}.$$

Daher hat (8) im Falle $0 < \lambda < \frac{1}{8}$, und nur dann, eine Lösung z_1 mit $0 < z_1 < 1$, und zwar jeweils genau eine solche Lösung.

Daher gilt für die Gleichung (1) folgendes:

Der Fall a) tritt niemals ein

der Fall b) tritt genau dann ein, wenn $\lambda \leqq 0$ oder $\lambda \geqq \frac{1}{8}$ ist

der Fall c) tritt niemals ein

der Fall d) tritt genau dann ein, wenn $0 < \lambda < \frac{1}{8}$ ist, (1) hat dann stets genau drei Lösungen.

Bemerkung: Im Falle $\lambda = \frac{1}{8}$ ist die einzige in $(0, \frac{\pi}{2})$ gelegene Lösung $\frac{\pi}{4}$ von (1) eine dreifache Wurzel der Gleichung (1).

8 Punkte

11/12;6 <u>Lösung:</u>

Bedeuten $s_1 = a + b + c + d$,

$s_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$,

$s_3 = abc + abd + acd + bcd$,

so ist die zu beweisende Relation mit

(1) $\quad 27\, s_3^2 \leqq 2 \cdot s_2^3$

äquivalent. Der Beweis von (1) wird auf den Beweis der beiden folgenden Ungleichungen zurückgeführt:

(2) $3s_1^2 \geqq 8s_2$,

(3) $4s_2^2 \geqq 9s_1s_3$,

in deren jeder Gleichheit genau für $a = b = c = d$ eintritt. Aus (3) und (2) folgt nämlich

$$16s_2^4 \geqq 81s_1^2s_3^2 \geqq 8 \cdot 27s_3^2s_2$$

und hieraus (1) wegen $s_2 > 0$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn sie in (2) und (3) gilt, also wenn $a = b = c = d$ ist.

Die Beziehungen (2) und (3) einschließlich der Gleichheitsaussage ergeben sich auf folgende Weise:

I. (elementarer Weg). Es gelten die Identitäten:

$$(4)\ 3s_1^2 - 8s_2 = 3(a+b+c+d)^2 - 8(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$= (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$$

$$(5)\ 4s_2^2 - 9s_1s_3 = 4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 -$$
$$- 9(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)$$
$$= (a^2+ab+b^2)(c-d)^2 + (a^2+ac+c^2)(b-d)^2 +$$
$$+ (a^2+ad+d^2)(b-c)^2 + (b^2+bc+c^2)(a-d)^2 +$$
$$+ (b^2+bd+d^2)(a-c)^2 + (c^2+cd+d^2)(a-b)^2,$$

aus denen (2) bzw. (3) einschließlich der Gleichheitsaussage unmittelbar folgen.

II. (Benutzung der Differentialrechnung).

Das Polynom $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) =$

$$= x^4-s_1x^3+s_2x^2-s_3x+s_4$$

mit $s_4 = abcd$ hat die vier positiven Nullstellen a,b,c,d, wobei jede ihrer Vielfachheit entsprechend oft hingeschrieben worden ist. Nach dem Satz von Rolle liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden von ihnen eine Nullstelle von

$P'(x) = 4x^3 - 3s_1x^2 + 2s_2x - s_3$, und wenn k der Nullstellen von P(x) zusammenfallen, ist diese Nullstelle eine (k-1)fache Nullstelle von $P'(x)$. Infolgedessen hat auch $x^3P'(\frac{1}{x}) = 4 - 3s_1x + 2s_2x^2 - s_3x^3$ drei positive reelle Nullstellen, wenn jede ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählt wird. Daher hat sowohl

$P''(x) = 12x^2 - 6s_1x + 2s_2$ als auch $\left[x^3P'(\frac{1}{x})\right]' =$

$= -3s_1 + 4s_2x - 3s_3x^2$

je zwei positive Nullstellen, die jeweils genau dann zusammenfallen, wenn $a = b = c = d$ ist. Folglich ist die Diskriminante jedes der beiden quadratischen Polynome nicht kleiner als Null und gleich Null genau dann, wenn $a = b = c = d$ ist, d.h., es gilt

$$D(P''(x)) = 9s_1^2 - 24s_2 = 3(3s_1^2 - 8s_2) \geqq 0$$

$$D(\left[x^3P'(\tfrac{1}{x})\right]') = 4s_2^2 - 9s_1s_3 \geqq 0$$

mit der entsprechenden Aussage über das Gleichheitszeichen, woraus unmittelbar (2) und (3) folgen.