A 11/12;I

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12;1. a) Es ist zu beweisen, daß die Zahl z =

$$\frac{65533^3 + 65534^3 + 65535^3 + 65536^3 + 65537^3 + 65538^3 + 65539}{32765 \cdot 32766 + 32767 \cdot 32768 + 32768 \cdot 32769 + 32770 \cdot 3277}$$

ganzrational ist!

b) Die Zahl z ist zu berechnen!

11/12;2. Vier Freunde, Axel, Bodo, Christian und Dieter, kauften sich ein Boot! Sie einigten sich, daß jeder von ihnen eine der ersten vier Fahrten mit dem Boot durchführen solle. Bei der Festlegung der Reihenfolge dieser Fahrten äußerten sie folgende Wünsche:

1. Für den Fall, daß Dieter als Erster fahren sollte, wollte Christian als Dritter fahren.
2. Wenn Axel oder Dieter als Zweiter fahren sollte, dann wollte Christian als Erster fahren.
3. Dann und nur dann, wenn Axel als Dritter fahren sollte, wollte Bodo als Zweiter fahren.
4. Falls Dieter als Dritter fahren sollte, so wollte Axel als Zweiter fahren.
5. Wenn Dieter als Letzter fahren sollte, dann wollten Christian als Dritter und Axel als Erster fahren.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten für die Reihenfolge, in der die ersten vier Fahrten durchgeführt werden können, so daß diese Wünsche erfüllt sind!

30 04 07-1

11/12;3. Gegeben sei in der Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $\overline{MP} \cdot \overline{MP_1} = r^2$ ist.

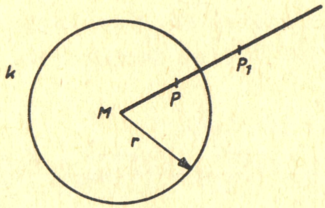


Abb. A 11/12;3

Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε , der k orthogonal schneidet, d. h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkte[n] stehen senkrecht aufeinander. Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12;4. Beweisen Sie, daß das Produkt

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdots \frac{2499}{2500} \quad \text{(n natürliche Zahl)}$$

kleiner als 0,02 ist!

11/12;5. Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks Δ ABC wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, daß die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren. Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

11/12;6. a) Ermitteln Sie den Wertevorrat W der für alle reellen x durch $y = \sin x + \cos x$ erklärten Funktion (d.h. alle diejenigen y, zu denen ein x mit $y = \sin x + \cos x$, x reell, existiert)!

b) Zeigen Sie, daß es eine ganzrationale Funktion g (y) mit folgender Eigenschaft gibt:
Gehört y zu W und ist x eine Zahl mit $\sin x + \cos x = y$, so ist $\sin^7 x + \cos^7 x = g(y)$.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 – 1. Tag –

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

11/12;1. Lösung: 6 Punkte

Man setzt

$x = 65\,536$ und $y = \frac{x}{2} = 32\,768$

Dann gilt:

$$z = \frac{(x-3)^3 + (x-2)^3 + (x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + (x+3)^3}{(y-3)\cdot(y-2) + (y-1)y + y(y+1) + (y+2)\cdot(y+3)}$$

$$= \frac{7x^3 + (3\cdot x\cdot 9 + 3\cdot x\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 1)\cdot 2}{4y^2 + 6 + 6}$$

$$= \frac{7x^3 + 84x}{4y^2 + 12} = \frac{7x(x^2 + 12)}{4y^2 + 12}.$$

Wegen $y = \frac{x}{2}$ erhält man hieraus

$$z = \frac{7x(x^2 + 12)}{x^2 + 12} = 7x = 7\cdot 65\,536 = 458\,752.$$

Die Zahl z ist also ganzrational, und es ist $z = 458\,752$.

11/12;2. Lösung: 7 Punkte

Zur Abkürzung kann man z. B. folgende Symbolik vereinbaren: (x, n) bedeute "x fährt als n-ter".

Dann lassen sich die fünf geäußerten Wünsche in die folgenden Implikationen umschreiben:

(1) Wenn (D,1), dann (C,3). (3b) Wenn (B,2), dann (A,3).
(2a) Wenn (A,2), dann (C,1). (4) Wenn (D,3), dann (A,2).
(2b) Wenn (D,2), dann (C,1). (5a) Wenn (D,4), dann (C,3).
(3a) Wenn (A,3), dann (B,2). (5b) Wenn (D,4), dann (A,1).

Man wird nun eine geeignete Fallunterscheidung treffen.
Je nach ihrer Wahl sind verschiedene Lösungswege möglich.

Die im folgenden Lösungsweg durchgeführte Fallunterscheidung ist vielleicht relativ naheliegend, weil in den Voraussetzungen der Implikationen (1) bis (5b) das Symbol D unter den Symbolen A, ..., D,1, ..., 4 am häufigsten auftritt.

1. Fall: (D,1).
Nach (1) folgt (C,3). Von den beiden Möglichkeiten (A,2), (A,4) würde (A,2) nach (2a) auf (C,1) führen, scheidet also aus; somit folgt (A,4). Für B verbleibt (B,2); dies ergibt nach (3b) den Widerspruch (A,3). Der 1. Fall ist also unmöglich.

2. Fall: (D,2).
Nach (2b) folgt (C,1). Von den beiden Möglichkeiten (A,3), (A,4) würde (A,3) nach (3a) auf (B,2) führen, scheidet also aus; somit folgt (A,4). Für B verbleibt (B,3).

3. Fall: (D,3).
Nach (4) folgt (A,2), nach (2a) weiter (C,1). Für B verbleibt (B,4).

4. Fall: (D,4).
Nach (5a) und (5b) folgt (C,3) und (A,1). Für B verbleibt (B,2); dies zieht wegen (3b) den Widerspruch (A,3) nach sich. Der 4. Fall ist also unmöglich.

Daher verbleiben für die Reihenfolge der ersten vier Fahrten nur die beiden Möglichkeiten

Christian, Dieter, Bodo, Axel (2. Fall),
Christian, Axel, Dieter, Bodo (3. Fall).

Jede dieser beiden Möglichkeiten ist tatsächlich Lösung der Aufgabe, da für jeden der genannten Wünsche stets entweder die Voraussetzung, unter der der betreffende Wunsch geäußert wurde, gar nicht eintritt, oder aber der Wunsch berücksichtigt wird.

11/12;3. Lösung: 7 Punkte

Der Mittelpunkt von k_1 sei N, die Schnittpunkte von k und k_1 seien S und T. Dann sind die Geraden durch M und S bzw. durch M und T wegen der Orthogonalität von k und k_1 Tangenten von M an k_1, also liegt M außerhalb von k_1.
Ist P ein beliebiger Punkt auf k_1, so sei P_1 der zweite Schnittpunkt der Geraden durch M und P mit k_1 (im Falle P = S oder P = T sei P_1 = P).
Dann ist die Gerade durch M und S Tangente an k_1, und daraus folgt $\overline{MP} \cdot \overline{MP_1} = \overline{MS}^2$.

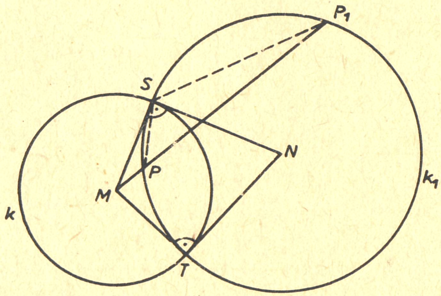


Abb. L 11/12;3

(Beweis: Für P = S ist die Behauptung wegen P_1 = S richtig; für P ≠ S ist $\sphericalangle MSP \cong \sphericalangle MP_1S$ *) (Sehnentangentenwinkel), $\sphericalangle SMP \cong \sphericalangle P_1MS$, also $\triangle MSP \sim \triangle MP_1S$ und mithin $\overline{MP} : \overline{MS} = \overline{MS} : \overline{MP_1}$.) Da M außerhalb von k_1 liegt, liegen P und P_1 auf demselben von M ausgehenden Strahl, und es gilt $\overline{MP} \cdot \overline{MP_1} = \overline{MS}^2$, so daß nach Definition P_1 Spiegelpunkt von P bezüglich k ist. Ist P_1 Spiegelpunkt von P, so ist P Spiegelpunkt von P_1. Daher gibt es zu jedem Punkt P_1 auf k_1 einen Punkt P auf k_1, zu dem P_1 Spiegelpunkt ist. Der gesuchte geometrische Ort ist mithin der Kreis k_1.

*) bzw $\sphericalangle MSP_1 \cong \sphericalangle MPS$.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklassen 11/12 - 2. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

11/12;4. Erster Lösungsweg: 6 Punkte

Neben dem Produkt p betrachten wir noch das Produkt

$$q = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{n}{n+1} \cdots \frac{2498}{2499}.$$

Da $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{7}{7}$ und allgemein für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n

$$\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1} \quad (\text{denn } 4n^2 - 1 < 4n^2) \text{ gilt,}$$

ist $p < q$.

Durch Multiplikation von $p < q$ mit p erhält man

$$p^2 < pq.$$

Da $p \cdot q = \frac{1}{2500}$ ist, gilt $p^2 < \frac{1}{2500}$, woraus wegen $\frac{1}{50} > 0$ die Behauptung $p < \frac{1}{50} = 0{,}02$ folgt.

Zweiter Lösungsweg:

$$p^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \cdots \frac{2499^2}{2500^2}$$

Daraus folgt

$$p^2 < \frac{1^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2 - 1^2} \cdots \frac{2499^2}{2500^2 - 1^2},$$

also wegen $(2n)^2 - 1^2 = (2n-1)(2n+1)$, mithin

$$p^2 < \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \cdots \frac{2499^2}{2499 \cdot 2501} = \frac{1}{2501},$$

folglich erst recht $p^2 < \frac{1}{2500}$ und weiter wie oben.

30 04 07-1

11/12;5. <u>Lösung:</u> 6 Punkte

Es seien $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ die Seitenlängen des gegebenen Dreiecks, r_a, r_b und r_c die Radien der auf den Punkten A, bzw. B, bzw. C liegenden Kugeln, schließlich M_a, M_b und M_c in gleicher Reihenfolge die Mittelpunkte der Kugeln.

Führt man drei zur Dreiecksebene senkrechte Schnittebenen durch die Mittelpunkte von je zwei Kugeln, so hat die Schnittfigur der Kugeln und der gegebenen Ebene mit je einer dieser drei Schnittebenen die in Abb. L 11/12;5 angegebene Gestalt.

In der Abbildung L 11/12;5 ist als Beispiel die durch A, B, M_b und M_a gehende Ebene dargestellt. Man entnimmt daraus mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Beziehung:

(*) $c^2 + (r_a - r_b)^2 = (r_a + r_b)^2$ oder umgeformt:

(1) $c^2 = 4\, r_a r_b$.

Durch Betrachtung der entsprechenden Figuren in den beiden anderen zur Dreiecksebene senkrechten Ebenen oder (am einfachsten) durch zyklische Vertauschung folgen die Beziehungen:

(2) $a^2 = 4\, r_b r_c$ und

(3) $b^2 = 4\, r_c r_a$.

Aus (1) ergibt sich $r_a = \frac{c^2}{4\, r_b}$, aus (3) ebenso

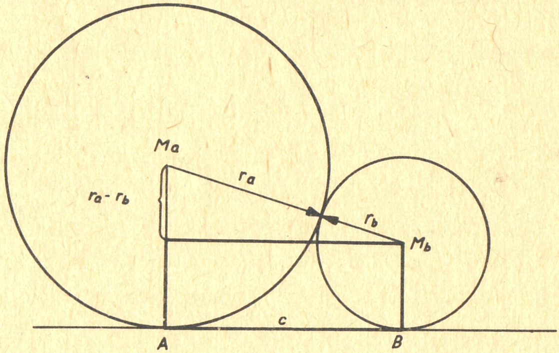
$r_a = \frac{b^2}{4\, r_c}$, also $r_a{}^2 = \frac{b^2 c^2}{16\, r_b \cdot r_c}$ oder wegen (2):

$r_a{}^2 = \frac{b^2 c^2}{4\, a^2}$, also

(3) $r_a = \frac{bc}{2\, a}$. Analog findet man

(5) $r_b = \frac{ca}{2\, b}$ und

(6) $r_c = \frac{ab}{2\, c}$.



L 11/12;5

Da nur (4), (5) und (6) den Bedingungen der Aufgabe genügen, sind das die Lösungen der gestellten Aufgabe.

11/12;6. Lösung: 8 Punkte

a) Für jedes reelle x gilt:

$y^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$, d. h.

(1) $y^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$, d. h.

$y^2 = 1 + \sin 2x$. Daher hat y^2 das Intervall $[0, 2]$ als Wertevorrat. Da mit jedem $y = \sin x + \cos x$ auch der Wert $\sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) = -y$ im Wertevorrat der Funktion $y = \sin x + \cos x$ auftritt, so folgt nunmehr, daß der Wertevorrat W das Intervall $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ ist.

b) Für jedes reelle x gilt:

(2) $y^7 = \sin^7 x + \cos^7 x + 7 \sin x \cos x (\sin^5 x + \cos^5 x) +$

$+ 21 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^3 x + \cos^3 x) +$

$+ 35 \sin^3 x \cos^3 x (\sin x + \cos x)$

(3) $y^5 = \sin^5 x + \cos^5 x + 5 \sin x \cos x (\sin^3 x + \cos^3 x) +$

$+ 10 \sin^2 x \cos^2 x (\sin x + \cos x)$,

(4) $y^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$.

Aus (4) und (1) folgt

(5) $\sin^3 x + \cos^3 x = y^3 - \frac{3}{2} (y^2 - 1) y$

$= \frac{1}{2} (-y^3 + 3 y)$.

Aus (3), (5) und (1) folgt

(6) $\sin^5 x + \cos^5 x$

$= y^5 - \frac{5}{2} (y^2 - 1) \frac{1}{2} (-y^3 + 3y) - \frac{10}{4} (y^2 - 1)^2 y$

$= \frac{1}{4} (-y^5 + 5 y)$.

Aus (2), (5), (6) und (1) folgt schließlich

$\sin^7 x + \cos^7 x$

$= y^7 - \frac{7}{2}(y^2-1) \frac{1}{4} (-y^5+5y) - \frac{21}{4} (y^2-1)^2 \frac{1}{2} (-y^3+3y) -$

$- \frac{35}{8} (y^2-1)^3 y$

$= \frac{1}{8} (y^7 - 7 y^5 + 7 y^3 + 7 y)$.

Es sind noch andere, z.T. elegantere, z.T. auch nicht so systematisch aufgebaute Lösungswege möglich. Man kann den "Abbau" von $\sin^7 x + \cos^7 x$ auch damit beginnen, daß man die Teilbarkeit von $\sin^7 x + \cos^7 x$ durch $\sin x + \cos x$ ausnutzt und den Quotienten $\sin^6 x - \sin^5 x \cos x + - \ldots + \cos^6 x$ weiter betrachtet, wobei man außer (1) statt (2), (3), (4) entsprechend

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$

$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x$

heranzieht.