IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklassen11 und 12

<u>Achtung</u>: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnung, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

11/12;1) Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ durch die (independente) Darstellung

(1) $a_n = c_2n^2 + c_1n + c_o$,

wobei c_o, c_1, c_2 reelle Zahlen sind.

Als erste Differenzenfolge bezeichnet man die Folge $D_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ und als zweite Differenzenfolge die Folge $D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)}$, $(n = 1,2,3,\ldots)$

a) Es seien $c_o = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Unter dieser Voraussetzung sind a_n, $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ für $n = 1,2,3,$ 4 und 5 zu berechnen.

b) Es ist allgemein zu beweisen, daß für (1) die Folge $D_n^{(2)}$ konstant ist.

11/12;2) In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ε die Ebene durch G, B, E.

Es ist zu beweisen, daß die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ε steht und von ihr im Verhältnis 1:2 geteilt wird.

11/12;3) Es sind alle reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems anzugeben:

$$x + y = az \qquad (1)$$

$$x - y = bz \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = cz \qquad (3)$$

Dabei sind a, b, c reelle Zahlen. (Fallunterscheidung!)

11/12;4) Gegeben seien natürliche Zahlen k und n mit $0 < k < n$. In einer Schachtel liegen (offen sichtbar, so daß ihre Anzahl festgestellt werden kann) genau n Kugeln. Zwei Spieler spielen ein Spiel nach der folgenden Regel:
Die Spieler nehmen abwechselnd Kugeln aus der Schachtel heraus, und zwar sind jeweils mindestens eine und höchstens k Kugeln zu entnehmen. Wer die letzte Kugel aus der Schachtel entnehmen muß, hat verloren.
Welche Beziehung zwischen k und n muß erfüllt sein, damit

a) der anziehende Spieler,
b) der nachziehende Spieler

den Gewinn erzwingen kann?

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklassen 11 und 12

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

11/12;1) **Lösung:** 8 Punkte

a) Durch Einsetzen von $n = 1,2,3,4,5,6,7$ in (1) erhält man $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 7$; $a_4 = 13$; $a_5 = 21$; $a_6 = 31$; $a_7 = 43$;

$D_1^{(1)} = 2$; $D_2^{(1)} = 4$; $D_3^{(1)} = 6$; $D_4^{(1)} = 8$;

$D_5^{(1)} = 10$; $D_6^{(1)} = 12$;

$D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = D_3^{(2)} = D_4^{(2)} = D_5^{(2)} = 2.$

b) Allgemein gilt für alle positiven ganzen n wegen (1)

$$\begin{aligned} D_n^{(1)} &= c_2(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_o \\ &\quad - c_2n^2 - c_1n - c_o \\ &= 2c_2n + c_2 + c_1, \text{ und daher} \end{aligned}$$

$$D_n^{(2)} = D_{n+1}^{(1)} - D_n^{(1)} = 2c_2(n+1) + c_2 + c_1 - 2c_2n - c_2 - c_1 = 2c_2.$$

Also ist $D_n^{(2)}$ für alle positiven ganzen n konstant..

11/12;2) <u>Lösung:</u> 11 Punkte

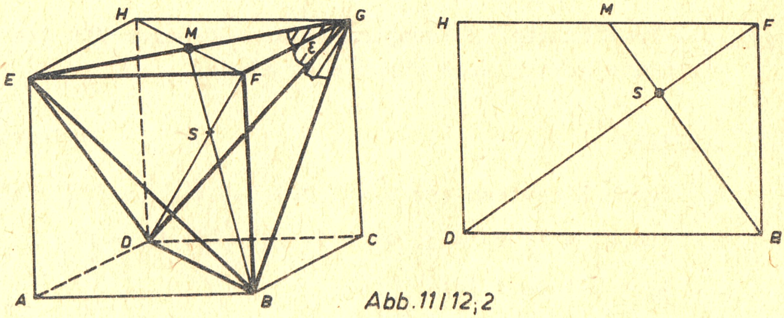

Abb. 11/12;2

(I) Das Dreieck $\triangle$ BGE ist gleichseitig; denn jede seiner Seiten ist Diagonale einer Seitenfläche des Würfels, und gemeinsame Basis zweier dreiseitiger Pyramiden, nämlich von $({}^{F}_{BGE})$ und $({}^{D}_{BGE})$, die wegen $\overline{FB} = \overline{FG} = \overline{FE}$ bzw. $\overline{DB} = \overline{DG} = \overline{DE}$ regelmäßig sind. Aus der Regelmäßigkeit dieser Pyramiden und der Gemeinsamkeit der Basis folgt nach einem bekannten Satz, daß die Lote von F und D auf die Basisebene ε den gleichen Fußpunkt S haben. Daher steht die Gerade durch F und D auf der gemeinsamen Basisebene ε senkrecht.

(II) Es sei M der Mittelpunkt der Diagonale HF. Dann liegen die Strecken MB und FD beide in der Fläche des Rechtecks DBFH. Ihr Schnittpunkt sei S. Punkt S liegt in der Ebene ε, da MB in ε liegt, ist also der Schnittpunkt von FD mit ε (Abb. L 11/12;2). In der Ebene des Rechtecks DBFH gehen aus den Geraden durch S mittels Schnitt durch die Parallelen DB und FH ähnliche Figuren hervor. Dabei gilt:

$\overline{DB} : \overline{MF} = 2 : 1 = \overline{DS} : \overline{SF}$, w. z. b. w.

11/12;3) Lösung: 9 Punkte

Angenommen, es sei (x, y, z) ein reelles Lösungstripel des gegebenen Gleichungssystems. Dann folgt aus (1) und (2)

durch Addition $2x = (a+b)z$, d. h. $x = \frac{a+b}{2}z$, (4)

durch Subtraktion $2y = (a-b)z$, d. h. $y = \frac{a-b}{2}z$. (5)

Man erhält daher aus (4) und (5) gemäß (3)

$$z^2\,\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{4} - cz = 0$$

$$z\left(\frac{a^2 + b^2}{2}z - c\right) = 0\,. \qquad (6)$$

Daraus folgt

entweder $z = 0$ und wegen (4) und (5) $x = 0$, $y = 0$ oder

$$\frac{a^2 + b^2}{2}z = c\,. \qquad (7)$$

Da für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt sind, erhalten wir das erste Lösungstripel $(0,0,0)$.

Nunmehr sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: a und b sind nicht gleichzeitig gleich Null, d.h. $a^2 + b^2 \neq 0$.

Dann erhält man aus (7)

$$z = \frac{2c}{a^2 + b^2}$$

und aus (4) und (5) $x = \frac{(a+b)c}{a^2+b^2}$, $y = \frac{(a-b)c}{a^2+b^2}$.

Da für diese Werte von x, y und z die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt sind, erhält man in diesem Falle das zweite Lösungstripel:

$\left(\frac{(a+b)c}{a^2+b^2}, \frac{(a-b)c}{a^2+b^2}, \frac{2c}{a^2+b^2}\right)$ sowie die Aussage, daß außer den beiden angegebenen Lösungstripeln (die im Falle $c \neq 0$ voneinander verschieden sind, im Falle $c = 0$ miteinander zusammenfallen) keine weiteren existieren können.

2. Fall: $a = b = 0$ und $c \neq 0$. Dann erhält man aus (1), (2) und (3) unmittelbar $x = y = z = 0$, also $(0,0,0)$ als einziges Lösungstripel.

3. Fall: $a = b = 0$ und $c = 0$.

Dann führen (2) und (3) auf $x = y = 0$, also können höchstens die Tripel $(0,0,t)$, wobei t eine beliebige reelle Zahl ist, Lösungen sein.

Für alle diese Tripel sind (im vorliegenden 3. Fall) in der Tat (1), (2), (3) erfüllt.

11/12;4) Lösung: 12 Punkte

Es gelten folgende Feststellungen:

(I) Verbleibt nach einem Zug eines Spielers genau eine Kugel in der Schachtel, so hat dieser Spieler den Gewinn erzwungen.

(II) Es sei z eine Zahl mit der Eigenschaft, daß ein Spieler den Gewinn erzwingen kann (oder erzwungen hat), wenn der Gegner am Zug ist und genau z Kugeln in der Schachtel liegen. Dann ist auch $k + 1 + z$ eine Zahl mit dieser Eigenschaft; denn befinden sich genau $k + 1 + z$ Kugeln in der Schachtel und ist der Gegner am Zug, so muß dieser eine Anzahl a Kugeln mit

(1) $\quad 1 \leqq a \leqq k$

entnehmen, und entnimmt der erstgenannte Spieler hierauf genau $k + 1 - a$ Kugeln (was zulässig ist, da wegen (1) auch $1 \leqq k + 1 - a \leqq k$ gilt), so verbleiben nach diesem Zug genau z Kugeln.

(III) Aus (I) und (II) folgt: Jede Zahl z der Form

(2) $$m(k + 1) + 1 \qquad (m = 0,1,2,\ldots)$$

hat die genannte Eigenschaft. Insbesondere folgt hiermit als eine

Lösung zu b): Ist n eine Zahl der Form (2), d. h. läßt n bei Division durch $k + 1$ den Rest 1, so kann der nachziehende Spieler den Gewinn erzwingen.

(IV) Ferner folgt als eine

Lösung zu a): Ist n von der Form

$$m(k + 1) + r \qquad (m = 0,1,2,\ldots;\ 1 < r \leqq k + 1),$$

d. h. läßt n bei Division durch $k + 1$ einen von 1 verschiedenen Rest, so kann der anziehende Spieler den Gewinn erzwingen. Er kann nämlich im ersten Zug $r - 1$ Kugeln entnehmen (was wegen $0 < r - 1 \leqq k$ zulässig ist), und hiernach ist die Anzahl z der verbliebenen Kugeln von der Form (2).

(V) Da die unter (III) und (IV) angegebenen Lösungen der Aufgaben a) und b) insgesamt alle überhaupt vorhandenen Möglichkeiten erschöpfen, sind sie auch jeweils die einzigen Lösungen der betreffenden Aufgabe.