A 10;I

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10;1) Zu ermitteln sind alle Paare natürlicher Zahlen derart, daß jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

10;2) Zu den reellen Zahlen a, b mit $a > 0$, $b > 0$ und $a \neq 1$, $b \neq 1$ ermittle man alle reellen Zahlen x, die die Gleichung $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ erfüllen.

10;3) A, B, C, D, E, F, G, H seien die Ecken eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in Abb. A 10;3 gewählt seien.

K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $\overline{DY} = \overline{EX}$ ist.

Man beweise, daß der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.

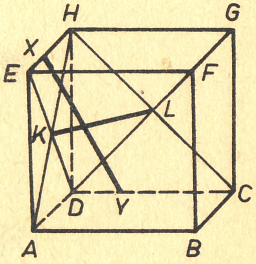

Abb. A 10;3

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10;4) Beweisen Sie folgenden Satz:
Wenn s und t von Null verschiedene reelle Zahlen und a, b und c drei paarweise voneinander verschiedene Lösungen der Gleichung $s\,x^2\,(x-1) + t\,(x+1) = 0$ sind, so gilt:
$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = -1.$

10;5) Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von $\triangle ABC$ liegen.
Beweisen Sie, daß der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!

10;6) Man beweise folgenden Satz:
Wenn in einer quadratischen Gleichung
(1) $ax^2 + bx + c = 0$
die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat die Gleichung (1) keine rationale Lösung.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 — 1. Tag —

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

10;1) **Lösung:** 6 Punkte

Angenommen, die Aufgabe hat eine Lösung.
Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen seien a und b.
Dann gilt:

(1) $a + b = u^2$

(2) $a + 41 = v^2$

(3) $b + 41 = w^2$

(4) $a + b + 41 = x^2$ mit natürlichen Zahlen u, v, w und x.

Aus (4) und (1) folgt durch Subtraktion
$41 = x^2 - u^2 = (x+u)(x-u)$.
Da 41 Primzahl ist und u und x natürliche Zahlen sind, also $x + u \geqq 0$ ist, kommt als einzige Zerlegung $x + u = 41$ und $x - u = 1$ in Frage, woraus

(5) $\underline{x = 21}$ und $\underline{u = 20}$ folgt.

Aus (2) und (3) folgt durch Subtraktion

(6) $a - b = v^2 - w^2$

und aus (1), (5) und (6) durch Addition

$$2a = 400 + v^2 - w^2, \text{ also}$$

$$a = 200 + \frac{v^2 - w^2}{2}.$$

Da a eine natürliche Zahl ist, gilt $2 \mid v^2 - w^2$.

Das bedeutet, daß v und w entweder beide gerade oder beide ungerade sind. In jedem Falle gilt dann

$2 \mid v + w$ und $2 \mid v - w$ und, wegen $v^2 - w^2 = (v+w)(v-w)$,
$4 \mid v^2 - w^2$.

Daher erhält man $a = 2\left(100 + \frac{v^2 - w^2}{4}\right)$ und mithin

$2 \mid a$ und aus (1) und (5) auch $2 \mid b$.

Wegen (2) und (3) und der Geradzahligkeit von a und b sind v und w ungerade.
Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl hat als letzte Ziffer eine der Zahlen 1, 5 oder 9.
Daher endet wegen (2) und (3) jede der Zahlen a und b auf 0, 4 oder 8. Wegen $a + b = 400$ folgt daraus:
a und b enden auf 0; v^2 und w^2 enden auf 1.

Ferner folgt aus $a + b = 400$, daß $a, b \leqq 400$ gilt. Nach (2), (3) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} 41 &\leqq v^2 \leqq 441, \\ 41 &\leqq w^2 \leqq 441, \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad \begin{cases} 7 \leqq v \leqq 21 \\ 7 \leqq w \leqq 21. \end{cases}$$

Somit können v und w nur gleich 9, 11, 19 oder 21 sein, und für das Paar (v^2, w^2) verbleiben als Möglichkeiten nur diejenigen Paare, die sich aus den Zahlen 81, 121, 361 und 441 bilden lassen und die Summe
$v^2 + w^2 = a + b + 82 = 482$ ergeben. Das einzige derartige (ungeordnete) Paar ist $\{121, 361\}$.
Daraus folgt, daß als v, w nur die Zahlen 11, 19 und folglich als a, b nur die Zahlen 80, 320 in Frage kommen.

Tatsächlich erfüllen diese Zahlen alle Bedingungen der Aufgabe; denn es gilt

(1) $\quad 320 + 80 = 20^2$

(2) $\quad 320 + 41 = 19^2$

(3) $\quad 80 + 41 = 11^2$

(4) $\quad 80 + 320 + 41 = 21^2$

10;2) **Lösung:** 6 Punkte

Angenommen, eine reelle Zahl x erfüllt die Gleichung.

Wegen $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ gilt dann

$$(\log_a x)\,\frac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a b, \text{ also } (\log_a x)^2 = (\log_a b)^2 \text{ und daher}$$

entweder (1) $\log_a x = \log_a b$

oder (2) $\log_a x = -\log_a b = \log_a \frac{1}{b}$.

Aus (1) folgt $x = b$, aus (2) folgt $x = \frac{1}{b}$. Daher können nur die Zahlen b und $\frac{1}{b}$ die vorgegebene Gleichung erfüllen.

Tatsächlich sind diese beiden Zahlen Lösungen der Gleichung; denn es gilt

$$(\log_a b)\,(\log_b b) = (\log_a b) \cdot 1 = \log_a b$$

und $$(\log_a \tfrac{1}{b})\,(\log_b \tfrac{1}{b}) = (-\log_a b) \cdot (-1) = \log_a b.$$

10;3) <u>Lösung:</u> 8 Punkte

Da jede Seitenfläche des Würfels Quadratfläche ist, gilt $\overline{DK}:\overline{DE} = 1:2 = \overline{DL}:\overline{DG}$ und daher nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

$$EG \parallel KL \qquad (1)$$

Bezeichnet Z denjenigen Punkt von GH, für den $\overline{HZ} = \overline{HX}$ ist, so gilt $\overline{HX}:\overline{HE} = \overline{HZ}:\overline{HG}$ und daher

$$XZ \parallel EG, \qquad (2)$$

wenn man einmal jede zu einem Punkt ausgeartete Strecke als zu jeder anderen Strecke parallel ansieht. Aus (1) und (2) folgt

$$XZ \parallel KL, \qquad (3)$$

da EG nicht zu einem Punkt ausgeartet ist.

Folglich liegen K, L, X und Z in derselben Ebene ε. G und H liegen nicht auf derselben Seite von ε, desgl. D und G sowie C und H, weil jede der Strecken GH, DG und CH mit ε einen Punkt (Z bzw. L) gemeinsam hat. Daher liegen C und D nicht auf derselben Seite von ε, so daß CD mit der Ebene ε einen Punkt Y' gemeinsam hat.

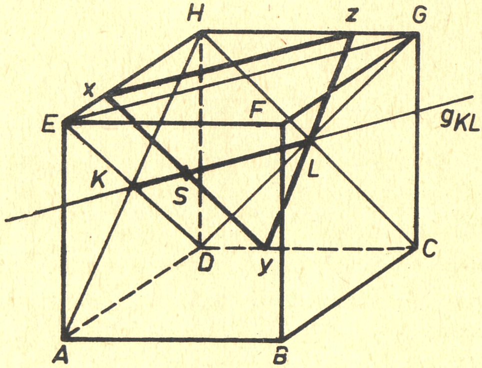

Abb. L 10;3

Wegen CD $\parallel$ GH gilt nach dem 2. Strahlensatz bzw. im Fall Z = G trivialerweise $\overline{GZ}:\overline{GL} = \overline{DY'}:\overline{DL}$, woraus wegen $\overline{GL} = \overline{DL}$ die Beziehung $\overline{DY'} = \overline{GZ}$ folgt. Daher fallen auf Grund der Definition von Y die Punkte Y und Y' zusammen. Mithin liegt Y in ε . Nach dem 1. Strahlensatz gilt wegen CD $\parallel$ GH

$$\overline{YL} : \overline{YZ} = \overline{DL} : \overline{DG} = 1 : 2 \qquad (4)$$

und, wenn S den Mittelpunkt von XY bezeichnet,

$$\overline{YS} : \overline{SX} = 1. \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt entweder L = S oder nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes LS $\parallel$ XZ, woraus sich wegen (3)

$$S \in g_{KL} \qquad (6)$$

ergibt. Da jeder Würfel konvex ist, liegt XY und damit S im Würfelkörper. Da von g_{KL} nur die Strecke KL im Würfel körper liegt, folgt in Verbindung mit (6)

$$S \in KL.$$

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Lösungen und Punktbewertung
Olympiadeklasse 10 — 2. Tag —

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 4. Stufe.

10;4) Lösung: 6 Punkte

Da $t \neq 0$ gilt, sind auch die drei Lösungen a, b, c der Gleichung sämtlich von Null verschieden.
Das Polynom

$s\,x^2\,(x-1) + t\,(x+1) = 0$ ist wegen $s \neq 0$ äquivalent mit

$x^2\,(x-1) + \frac{t}{s}\,(x+1) = 0$, und es gilt:

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^2\,(x-1) + \frac{t}{s}\,(x+1)$, also

$$x^3 - x^2\,(a+b+c) + x\,(ab + bc + ac) - abc =$$
$$= x^3 - x^2 + \frac{t}{s}\,x + \frac{t}{s}$$ als Identität

zweier Polynome in x.
Durch Koeffizientenvergleich erhält man

(1) $a+b+c = 1$

(2) $ab+bc+ac = \frac{t}{s}$

(3) $abc = -\frac{t}{s}$.

Aus (2) und (3) folgt durch Divison

$\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -1$, und daher wegen (1)

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1.$$

10;5) Lösung: 7 Punkte

AB ist Sehne jedes der drei Kreise k, k' und k".
Die Mittelpunkte M' und M" sind daher die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AB mit dem Kreis k. Dabei liege M" auf derselben Seite der Geraden g_{AB} wie C, und M' demzufolge auf der anderen Seite von g_{AB}.

Wegen $\overline{AM'} = \overline{BM'}$ und $\overline{MA} = \overline{MM'} = \overline{MB}$ gilt zunächst $\triangle$ AMM' $\cong$ $\triangle$ BMM' und daher $\sphericalangle$ AMM' $\cong$ $\sphericalangle$ BMM', mithin nach einem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel.

$$\overline{\sphericalangle ACM'} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMM'} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle BMM'} = \overline{\sphericalangle BCM'} \qquad +)$$

Folglich enthält die Gerade $g_{CM'}$ die Winkelhalbierende des Dreiecks $\triangle$ ABC durch C. Die Punkte A und B liegen daher auf verschiedenen Seiten von $g_{CM'}$, so daß die Strecke AB die Gerade $g_{CM'}$ in einem Punkte schneidet, der mit Q bezeichnet werde. Da M' und C auf Grund unserer Festlegung auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, schneidet CM' die Gerade g_{AB}, und zwar in Q. Daher liegt Q auf AB und auf CM'. Der Schnittpunkt des von M' ausgehenden Strahles durch C mit dem Kreis k' werde mit P bezeichnet. Da AB als Sehne von k' in der von k' begrenzten Kreisfläche liegt, muß Q auf der Strecke M'P liegen. Hieraus folgt, daß A und M' auf derselben Seite von g_{PB} liegen.

Andernfalls lägen die Strecken PM' und AB nicht auf derselben Seite der Geraden g_{PB} und hätten folglich keinen Schnittpunkt.
Daher ist $\sphericalangle$ PM'B in bezug auf k' zum Peripheriewinkel $\sphericalangle$ PAB gehöriger Zentriwinkel und folglich doppelt so groß wie dieser. Andererseits ist $\sphericalangle$ CM'B (= $\sphericalangle$ PM'B) als Peripheriewinkel im Kreis k ebenso groß wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle$ CAB. Folglich enthält g_{AP} die Winkelhalbierende von $\triangle$ ABC durch A. Also ist P als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle$ ABC.

+) $\overline{\sphericalangle ABC}$ bedeutet die Größe des Winkels $\sphericalangle$ ABC

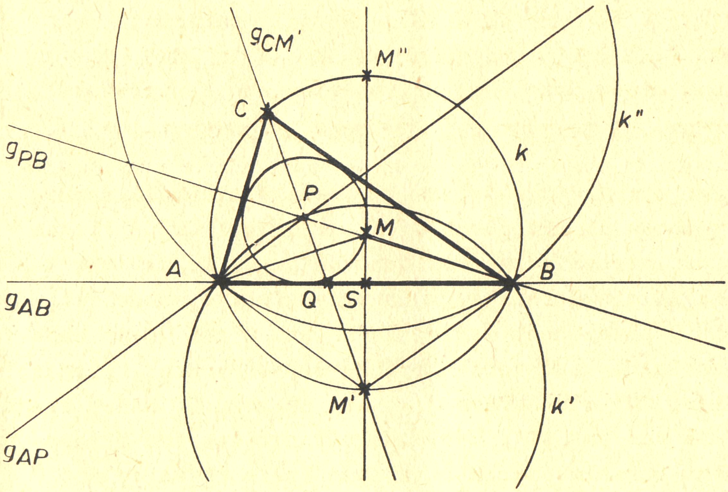

Abb. L 10;5

10;6) Lösung: 7 Punkte

Der Beweis wird indirekt geführt:
Angenommen, eine Gleichung (1) mit ungeraden a, b, c besitzt eine rationale Lösung x_1. Dann läßt sich x_1 in der Form $x_1 = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze teilerfremde Zahlen sind
und $q \neq 0$ ist, und es gilt:

$$(2) \quad a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0, \text{ also}$$

$$(3) \quad ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

1. Fall: p und q sind ungerade.
Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade, die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind und auch die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite von (3) eine ungerade Zahl, also eine Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

2. Fall:
Eine der beiden Zahlen p, q ist gerade, die andere ungerade. Dann ist bpq eine gerade Zahl, und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist die eine gerade, die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

3. Fall: p und q sind gerade.
Dann sind sie im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd. Da es keine weiteren Möglichkeiten gibt, ist die Behauptung bewiesen.