IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10;1. Geben Sie alle durch 11 teilbaren natürlichen dreistelligen Zahlen an, die bei Division durch 5 den Rest 1 und bei Division durch 7 den Rest 3 ergeben!

10;2. Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, daß ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt.
Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

10;3. Geben Sie a) eine notwendige und hinreichende, b) eine notwendige und nicht hinreichende sowie c) eine hinreichende und nicht notwendige Bedingung dafür an, daß

$$\sqrt{1 - \left| \log_2 |5 - x| \right|} > 0$$

gilt!
Die anzugebenden Bedingungen sind dabei jeweils so zu formulieren, daß sie in der Forderung bestehen, x solle in einem anzugebenden Intervall oder in einem von mehreren anzugebenden Intervallen liegen.

30 04 07-1

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10;4. Man ermittle alle Paare reeller Zahlen a und b ($b < a$), für die die Summe beider Zahlen, das Produkt beider Zahlen und eine der Differenzen der Quadrate beider Zahlen untereinander gleich sind.

10;5. Gegeben seien ein Dreieck $\triangle ABC$, und auf AB ein Punkt D. Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, daß DE die Dreieckfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

10;6. Von einer quadratischen Funktion $y = a x^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ denke man sich die Tabelle

x	1	2	3	4
y	1	2	n_1	n_2

gebildet.

Ermitteln Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, für die n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sind!

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 1. Tag -

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

10;1. Erster Lösungsweg: 7 Punkte

Angenommen, z sei eine natürliche Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Da z dreistellig ist, gilt

$z = a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$ mit natürlichen Zahlen a_i und (1)

$1 \leq a_2 \leq 9;\ 0 \leq a_1 \leq 9;\ 0 \leq a_0 \leq 9.$ (2)

a_0 kann nur 1 oder 6 sein, da z bei Division durch 5 den Rest 1 läßt. (3)

Nach dem Satz über die Teilbarkeit durch 11 folgt aus (1) unter Berücksichtigung von (2)

$a_2 + a_0 - a_1 = 11\,n$, n natürliche Zahl. (4)

Hieraus folgt, daß n nur 0 oder 1 sein kann. (5)

Nach (1) läßt sich z auch folgendermaßen darstellen

$z = a_2 \cdot 98 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 7 + a_1 \cdot 3 + a_0.$ (6)

Da z bei Division durch 7 den Rest 3 läßt, folgt aus (6)

$2a_2 + 3a_1 + a_0 = 7\,m + 3$; m natürliche Zahl. (7)

Nach (4) gilt:

$3a_2 - 3a_1 + 3a_0 = 33\,n$ (8)

Aus den letzten beiden Aussagen folgt

$5a_2 + 4a_0 = 33\,n + 7\,m + 3$ und damit

$33\,n - 4a_0 + 3 = 5a_2 - 7m.$ (9)

Fallunterscheidung:

Nach (3) und (5) kommen nur folgende Fälle in Betracht:

a_0	n	$33n-4a_0+3$	Damit gilt nach (9)	Hieraus und aus (2) folgen als einzige Möglichkeit für a_2	Hieraus und aus (4),(2) folgen als einzige Möglichkeit für a_1
1	0	- 1	$7m = 5a_2 + 1$	4	5
6	0	- 21	$7m = 5a_2 + 21$	7	keine
1	1	32	$7m = 5a_2 - 32$	5	keine
6	1	12	$7m = 5a_2 - 12$	1 8	keine 3

Hieraus folgt, daß nur 451 und 836 den Bedingungen der Aufgabe entsprechen können. Wie die Probe zeigt, ist dies der Fall.

Zweiter Lösungsweg:

Angenommen, z sei eine Zahl der gesuchten Art. Dann gilt $z = 5a + 1 = 7b + 3 = 11c$
mit ganzen Zahlen a, b, c. Daraus folgt

$$15a + 3 = 21b + 9, \text{ also}$$
$$a = 7(3b - 2a) + 6,$$

d.h. $a = 7p + 6$ mit einer ganzen Zahl p. Dies führt auf $z = 35p + 31$, also folgt weiter

$$210p + 186 = 66c, \text{ also}$$
$$p = 11(6c - 19p - 17) + 1,$$

d. h. $p = 11q + 1$ mit einer ganzen Zahl q.
Somit ergibt sich $z = 385q + 66$. Die einzigen dreistelligen Zahlen dieser Form erhält man für q = 1;2, nämlich z = 451 bzw. z = 836. Eine Probe zeigt, daß sie den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Dritter Lösungsweg:

Angenommen, z sei eine Zahl der gesuchten Art und es sei $z' = z + 11$. Dann folgt für z':

(1) $11 \mid z'$

(2) $7 \mid z'$ Wegen $z = 7k + 3$ (k natürliche Zahl) gilt
$z' = 7k + 14 = 7(k + 2)$

(3) z' läßt bei Division durch 5 den Rest 2, endet also auf 2 oder 7.

Aus (1) und (2) folgt, da 7 und 11 teilerfremd sind,

(4) $77 \mid z'$.

Also ist z' ein Vielfaches von 77, das wegen (3) auf 2 oder 7 endet. Das sind im angegebenen Bereich die Zahlen

$$6 \cdot 77 = 462$$

und $11 \cdot 77 = 847$ und nur diese.

Daraus erhält man als Lösungen genau die Zahlen 451 und 836.

10;2. <u>Lösung:</u> 6 Punkte

Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muß man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte A, B, C, A', B', C' (A' liege A gegenüber usw.).

Da u.a. 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate ABA'B', ACA'C', BCB'C' legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder C' bzw. B oder B' bzw. A oder A'), daß die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen. Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten.

Da auch eine Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, daß unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwa die Eckpunkte A, B, C als Spitzen auftreten.

Man überzeugt sich leicht, daß man damit einen Körper der geforderten Art erhält.

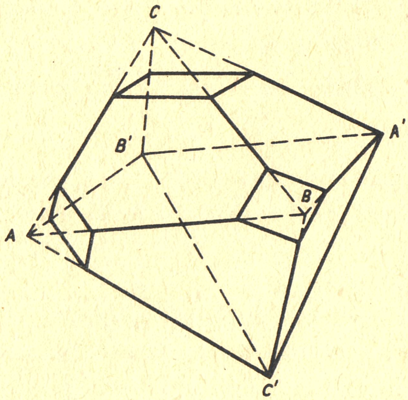

Abb. L 10;2

10;3. Lösung: 7 Punkte

Die gegebene Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn

$$\left|\log_2 |5-x|\right| < 1, \text{ d.h., } -1 < \log_2 |5-x| < 1 \text{ gilt.}$$

Letzteres ist äquivalent mit $0{,}5 < |5-x| < 2$. (1)

Fallunterscheidung:

1. $x \geq 5$: Dann ist (1) äquivalent mit $5{,}5 < x < 7$ (2).
2. $x < 5$: Dann ist (1) äquivalent mit $3 < x < 4{,}5$ (3).

Notwendig und hinreichend dafür, daß x die gegebene Ungleichung erfüllt, ist also, daß x in einem der durch (2) oder (3) charakterisierten Intervalle liegt.

Eine notwendige und nicht hinreichende Bedingung ist etwa, daß x im Intervall $3 < x < 7$ liegt. Eine hinreichende und nicht notwendige Bedingung ist etwa, daß x im Intervall $5{,}5 < x < 7$ liegt. Natürlich kann man auch beliebig viele andere Bedingungen von dieser Art angeben.

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

3. Stufe (Bezirksolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10 - 2. Tag -

<u>Achtung:</u> Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 3. Stufe.

10;4. <u>Lösung:</u> 6 Punkte

Angenommen, a und b seien Zahlen der verlangten Art. Dann folgt $a \neq -b$; denn wäre $a = -b$, so erhielte man nach Aufgabenstellung $0 = a + b = ab = -b^2$, also $b = 0$, $a = 0$, im Widerspruch dazu, daß nach Aufgabenstellung $b < a$ sein müßte.

Nach Aufgabenstellung ist ferner entweder $a + b = a^2 - b^2$ oder $a + b = b^2 - a^2$. Die letzte Gleichung würde wegen $a + b \neq 0$ auf $1 = b - a$ und somit ebenfalls auf einen Widerspruch zu $b < a$ führen. Daher verbleibt nur die Möglichkeit $a + b = a^2 - b^2$, woraus wegen $a + b \neq 0$ weiter $1 = a - b$, also $a = b + 1$ folgt. Setzt man dies in $a + b = ab$ ein, so erhält man die Gleichung $2b + 1 = b^2 + b$, d. h. $b^2 - b - 1 = 0$, die die Lösungen

$$b_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}\,, \text{ d. h.}$$

$$b_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,, \text{ und nur diese}$$

hat. Wegen $a = b + 1$ erhält man als zu b_1 bzw. b_2 gehörige Werte für a

$$a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad a_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Somit können höchstens die Paare (a_1, b_1) und (a_2, b_2) Lösung der Aufgabe sein.

Die folgende Probe zeigt, daß sie dies tatsächlich sind:

Erstens gilt $b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} < \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = a_{1,2}$.

Zweitens ist

$$a_{1,2} + b_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5},$$

$$a_{1,2} \cdot b_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5} \pm 3\sqrt{5} + 5}{4} = 2 \pm \sqrt{5},$$

$$a_{1,2}^{\;2} - b_{1,2}^{\;2} = \frac{(9 \pm 6\sqrt{5} + 5) - (1 \pm 2\sqrt{5} + 5)}{4}$$

$$= 2 \pm \sqrt{5}$$

(oberes Vorzeichen stets für a_1, b_1, unteres Vorzeichen stets für a_2, b_2).

10;5. Erster Lösungsweg: 7 Punkte

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overline{AD} \leqq \overline{DB}$ vorausgesetzt. Der Mittelpunkt von BC sei M. Dann hat $\triangle$ABM halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle$ ABC. Beweis: Beide Dreiecke stimmen in der Seite AB überein. Die zu dieser Seite gehörende Höhe ist im Dreieck $\triangle$ABM nach einem der Strahlensätze halb so groß wie die entsprechende Höhe im Dreieck $\triangle$ABC.

I. Kein von C verschiedener Punkt E' auf AC kann der Aufgabenstellung genügen; denn für jeden solchen Punkt ist der Flächeninhalt von $\triangle$ADE' kleiner als der von $\triangle$ADC und somit stets kleiner als die Hälfte des Flächeninhalts von $\triangle$ABC.
Also kann es höchstens auf BC einen Punkt der gesuchten Art geben.
Angenommen, ein Punkt E auf BC habe die verlangte Eigenschaft. Dann sind $\triangle$ABM und $\triangle$DBE flächengleich, also liegt M zwischen E und B, und es sind auch $\triangle$ADM und $\triangle$DME flächengleich. Hieraus folgt AE $\parallel$ DM.

II. Daher kann ein Punkt E nur dann der Aufgabenstellung genügen, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man konstruiere den Mittelpunkt M von BC. Schneidet die Parallele durch A zu DM die Strecke BC, so sei E der Schnittpunkt.

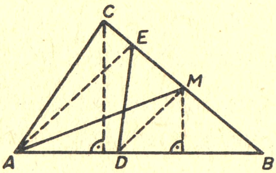

Abb. L 10;5

III. Der Beweis, daß diese Konstruktion zu einem Punkt E der gesuchten Art führt, folgt durch Umkehrung der in I. genannten Schlüsse.

IV. Die Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar. Sei nämlich E zunächst als der (stets existierende) Schnittpunkt der Parallelen durch A zu DM mit dem von B durch C gehenden Strahl definiert. Dann gilt $\overline{EM} : \overline{MB} = \overline{AD} : \overline{DB} \leqq 1 : 1$, also liegt E auf der Strecke BC (im Falle $\overline{AD} = \overline{DB}$ und nur in diesem so, daß E mit C zusammenfällt).

Einen zweiten Lösungsweg erhält man, indem man die Parallele durch A zu DC mit der Geraden durch B und C zum Schnitt S bringt und dann das zu $\triangle$ABC flächengleiche $\triangle$ DBS durch seine Seitenhalbierende DE halbiert.

10;6. Lösung: 7 Punkte

Aus den gegebenen Wertepaaren erhält man die Gleichungen

(1) $a + b + c = 1$
(2) $4a + 2b + c = 2$
(3) $9a + 3b + c = n_1$
(4) $16a + 4b + c = n_2$

Durch Subtraktion ergibt sich aus (2) und (1), (3) und (2) bzw. (4) und (3)

$3a + b = 1$
$5a + b = n_1 - 2$
$7a + b = n_2 - n_1$.

Daraus folgt

$$2a = n_1 - 3$$
$$2a = n_2 - 2n_1 + 2$$

und schließlich $3n_1 - 5 = n_2$.

Da n_1 und n_2 einstellige natürliche Zahlen sein sollen, kann n_1 nur die Werte 2, 3 und 4 annehmen.

Es sei $n_1 = 2$.

Dann ist $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = -1$

Es sei $n_1 = 3$.

Dann ist $a = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es sei $n_1 = 4$.

Dann ist $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1$

Daher können nur die quadratischen Funktionen

$$\text{(I)} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$$

und $$\text{(II)} \quad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$

die gestellten Bedingungen erfüllen.

Durch Aufstellen der vorgeschriebenen Tabelle stellt man fest, daß sie dies auch tun.

Zu I:

x	1	2	3	4
y	1	2	2	1

Zu II:

x	1	2	3	4
y	1	2	4	7