A 10

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
2. Stufe (Kreisolympiade)
Olympiadeklasse 10

Achtung: Alle Aussagen sind stets zu beweisen bzw. zu begründen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnung, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen.

10;1) Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten

$$\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0{,}0379]}\ !$$

Dabei bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

10;2) Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ so, daß jede der Zahlen

$d_1 = a_4 - a_3$, $d_2 = a_3 - a_2$, $d_3 = a_2 - a_1$,

$d_4 = a_4 - a_2$, $d_5 = a_3 - a_1$, $d_6 = a_4 - a_1$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.

10;3) Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).

a) Führen Sie folgende Konstruktionen aus:
Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E. Von A aus werde die Strecke AB mit $\overline{AB} = n$ so auf g abgetragen, daß B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $\overline{BC} = m$ so abgetragen, daß A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich).

30 04 06-1

Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius $\overline{BC}$ geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.

b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

10;4) Mit welchen der folgenden Bedingungen (1), ..., (5) ist die Bedingung $3x^2 + 6x > 9$ äquivalent?

(1) $-3 < x < 1$; (2) $x > -3$; (3) $x < 1$; (4) $x < 1$ oder $x > -3$
(5) $x > 1$ oder $x < -3$

IX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen und Punktbewertung

Olympiadeklasse 10

Achtung: Die Bemerkungen im Vorspann zu den Lösungen für die 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe.

10;1) Lösung: 6 Punkte

Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 < \lg 3790 < 4$,

also $[\lg 3790] = 3$.

Wegen $10^{-2} < 0{,}0379 < 10^{-1}$ ist $-2 < \lg 0{,}0379 < -1$,

also $[\lg 0{,}0379] = -2$.

Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1{,}5$.

10;2) Lösung: 12 Punkte

Angenommen, $a_1, \ldots, a_4$ seien vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, \ldots, d_6$ die Gleichungen

$$d_4 = d_1 + d_2\ , \quad d_5 = d_2 + d_3\ , \quad d_6 = d_1 + d_2 + d_3\ .$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

I. d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet dieser Fall aus.

II. d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2). Dann ergibt sich derselbe Widerspruch.

III. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2).

Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_6 gerade und größer als 2 ist.

IV. Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

a) Unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, daß entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist.

b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl.

Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d_6 = d_2 + 4$.

Nun ist von drei ganzen Zahlen der Form d_2, d_2+2, d_2+4 stets eine durch 3 teilbar.

(Beweis: Beim Teilen von natürlichen Zahlen durch 3 können nur die Reste 0, 1 oder 2 auftreten.

Tritt beim Teilen von d_2 der Rest 0 auf, ist d_2 durch 3 teilbar.

Tritt der Rest 1 auf, ist (wegen $1+2=3$) $d_2 + 2$ durch 3 teilbar.

Tritt der Rest 2 auf, ist (wegen $2+4=6$) $d_2 + 4$ durch 3 teilbar.)

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3.

Da aber ($d_2 > 1$ ist, also) $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.

Hiernach folgt weiter $a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2$,

$$a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5,$$
$$a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7.$$

Daher können $a_1, \ldots, a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

(✱) $a_1 = n,\ a_2 = n + 2,\ a_3 = n + 5,\ a_4 = n + 7$ mit einer natürlichen Zahl n sind.

Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (✱) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen $d_1 = a_4 - a_3 = 2$, $d_2 = a_3 - a_2 = 3$, $d_3 = a_2 - a_1 = 2$, $d_4 = a_4 - a_2 = 5$, $d_5 = a_3 - a_1 = 5$, $d_6 = a_4 - a_1 = 7$ Primzahl.

10;3) Lösung: 12 Punkte

a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild: (s. Abb. L 10;3)

b) Aus der Konstruktion folgt:

$\overline{AB} = n$ $\overline{AY} = \overline{DY} = \overline{EY} = m$

Ferner ist $\overline{AD} = x$. $(= \overline{BD})$

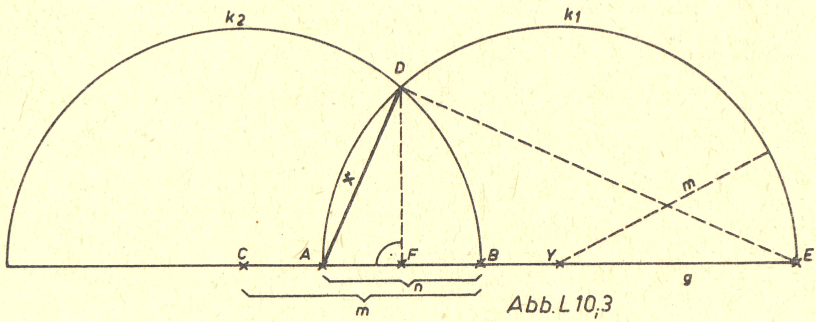

Abb. L 10;3

Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n, \text{ also}$$

$$x = \sqrt{m \cdot n}.$$

10; 4) Lösung: 10 Punkte

Folgende Ungleichungen sind der gegebenen äquivalent

$$x^2 + 2x - 3>0,$$

$$(x+1)^2>4,$$

(1. Fortsetzung:) $|x+1|>2$

(2. Fortsetzung:) $(x+1)^2 - 2^2>0,\ (x-1)(x+3)>0.$

Nach Fallunterscheidung erhält man (in jeder der beiden Fortsetzungen) als äquivalent mit der letzten Bedingung: $x>1$ oder $x<-3$.

Damit ist gezeigt, daß von den Bedingungen (1) bis (5) nur die Bedingung (5) der gegebenen äquivalent ist.